

Reconocimiento de imágenes RGB con momentos multicanal de Zernike

Alicia Noriega-Escamilla, César Camacho-Bello,
José Saúl Rivera-López, Horlando Vargas-Vargas

Universidad Politécnica de Tulancingo,
México

aliciane7@gmail.com, {cesar.camacho, 1915001,
horlando.vargas.1631027}@upt.edu.mx

Resumen. En este trabajo se presenta un análisis de los descriptores tipo momentos de Zernike y sus invariantes para la clasificación de imágenes en color. Se compara los momentos multicanal de Zernike con los métodos existentes. Los resultados de los experimentos realizados presentan una exactitud en la clasificación superior al 99 %.

Palabras clave: Polinomios de Zernike, momentos de Zernike, momentos multicanal de Zernike.

Recognition of RGB Images with Zernike Multichannel Moments

Resumen. This paper presents an analysis of the typical descriptors of Zernike and its invariants for the classification of color images. Zernike's multichannel moments are compared to existing methods. The results of the experiments carried out show an accuracy in the classification greater than 99 %.

Palabras clave: Zernike Polynomials, Zernike Moments, Zernike Multichannel Moments.

1. Introducción

Los descriptores tipo momentos de una imagen y sus invariantes a transformaciones geométricas han sido utilizados ampliamente en aplicaciones de Visión por Computadora [1] y Reconocimiento de Patrones [5], debido a que los objetos exhiben una complejidad natural a cambios de escala, traslación, ruido y diversos factores involucrados en la adquisición de imágenes. Entre los descriptores más representativos se encuentran los momentos de Zernike, los cuales son capaces de obtener suficiente información para separar objetos en clases y son robustos ante transformaciones de tipo geométrico y ruido [2].

La mayor parte del estudio para el desarrollo de descriptores invariantes se ha realizado en imágenes en escala de grises; sin embargo, hoy en día la mayor parte de la información para el reconocimiento de objetos proviene de imágenes en color.

Por lo general, se utilizan dos enfoques en el procesamiento del color de la imagen; el primero, es transformar la imagen en color en escala de grises promediando los tres canales RGB, con lo que existe pérdida de información de color y el segundo, descompone la imagen en sus tres canales para analizar la información de cada canal por separado.

Para el análisis de imágenes a color con momentos radiales se ha utilizado el álgebra de cuaternión para representar las imágenes mediante los momentos Cuaternión y sus invariantes a escala, rotación y traslación. Recientemente, el enfoque multicanal surge como una propuesta alternativa a los momentos Cuaternión para la representación y reconocimiento de imágenes en color.

Sing y Sing [9] presentan los momentos ortogonales multicanal basados en los momentos Zernike (MM). De igual modo, Hosny y Darwish [3] presentan un nuevo conjunto de momentos multicanal de Chebyshev-Fourier (MMCF) y sus invariantes de rotación, escala y traslación para la representación y el reconocimiento de imágenes en color.

Hosny y Darwish [3] realizan una serie de experimentos comparando el rendimiento de los momentos multicanal de Chebyshev-Fourier propuestos con los momentos de cuaternión existentes y los momentos multicanal de Zernike propuestos por Singh y Singh [9]. Ambas publicaciones confirman la superioridad de los momentos multicanal frente a los momentos cuaternión.

Por otro lado, para evaluar la capacidad descriptiva de los momentos ortogonales multicanal de Zernike se realizan experimentos de clasificación que permiten reconocer objetos de color similares en presencia de distorsiones geométricas y diferentes tipos de ruido. Los artículos citados utilizan distancias entre vectores de características como métrica para medir la similitud entre dos imágenes. Actualmente el uso de diferentes modelos de clasificadores tales como, arboles de decisión, análisis discriminante, máquinas de vectores de soporte y vecinos cercanos permiten realizar clasificación supervisada y generan modelos con base en relaciones, patrones o reglas, para poder clasificar nuevos elementos.

Estos modelos de clasificación presentan precisión en la predicción, eficiencia en costos computacionales, robustez para funcionar con ruido y la habilidad de trabajar con una gran cantidad de datos. Sin embargo, la calidad de los modelos depende en gran medida de la calidad de los datos usados en su entrenamiento. En este trabajo las imágenes son descritas mediante los momentos multicanal de Zernike, y los experimentos realizados muestran el comportamiento de estos descriptores para el reconocimiento de imágenes RGB con la finalidad de determinar el modelo de clasificación adecuado para los momentos multicanal de Zernike.

2. Momentos multicanal de Zernike

Los momentos multicanal quedan definidos como un conjunto de momentos para cada canal de una imagen de color $f_C(r, \theta)$, donde $f_R(r, \theta)$, $f_G(r, \theta)$, $f_B(r, \theta)$ corresponden a las funciones de intensidad del canal rojo, verde y azul respectivamente. Los momentos de cada canal se calculan como [9]:

$$M_{nl}^C(f_C(r, \theta)) = \frac{n+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 Z_{nl}(r, \theta) f_C(r, \theta) r dr d\theta, \quad (1)$$

donde C se refiere a los canales R , G y B , y $Z_{nl}(r, \theta)$ son los polinomios de Zernike de enésimo grado n y repetición l , definidos de la siguiente manera [10]:

$$Z_{nl}(r, \theta) = R_{nl}(r) e^{il\theta}, \quad (2)$$

donde la parte radial esta definida como:

$$R_{nl}(r) = \sum_{s=0}^{(n-|l|)/2} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+|l|}{2} - s\right)! \left(\frac{n-|l|}{2} - s\right)!}. \quad (3)$$

Una característica importante de la parte radial de los polinomios de Zernike es su simetría con respecto al orden de repetición l , es decir:

$$R_{n-l}(r) = R_{nl}(r). \quad (4)$$

Además, los polinomios de Zernike satisfacen la condición de ortogonalidad:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 Z_{nl}(r, \theta) Z_{mk}(r, \theta) r dr d\theta = \frac{\pi}{n+1} \delta_{mn} \delta_{kl}. \quad (5)$$

La complejidad del cálculo de la componente radial de los polinomios de Zernike definida en la Ec. 3. Se utilizan relaciones de recurrencia, debido a que su implementación numérica es estable y rápida [1]. Existen diferentes propuestas de relaciones de recurrencia [6],[4]; sin embargo, la propuesta de Honarvar y coautores [8] para el cálculo rápido y estable es la más utilizada. La relación de recurrencia está dada por:

$$R_n^m(r) = r[R_{n-l}^{m-l}(r) + R_{n-l}^{m+l}(r)] - R_{n-2}^m(r), \quad (6)$$

con el polinomio radial de orden cero $R_0^0(r) = 1$, se pueden calcular todos los polinomios radiales $R_n^m(r)$ con enteros ≥ 0 tal que $n - m$ es par y no negativo, y $R_n^m(r) \equiv 0$ cuando $n < m$.

Una de las propiedades más importantes que los momentos ortogonales poseen es su invariancia a la rotación, traslación y escala. En el caso de la invariante de rotación, una imagen puede rotar un ángulo α con respecto a la imagen original:

$$M_{n,l}^c(f) = M_{n,l}^c(f) e^{il\alpha}, \quad (7)$$

por lo tanto, los invariantes de rotación se pueden construir tomando la magnitud de los momentos $|M_{n,l}^C|$. La invariancia a la escala, se obtiene realizando un mapeo de la imagen en un círculo de radio unitario de forma independiente a la escala de la imagen, este mapeo proporciona la invariancia al escalamiento. La invariante de traslación es obtenida realizando una normalización de la imagen donde el objeto se desplaza de tal manera que su centroide coincide con el origen del sistema de coordenadas, de acuerdo con Suk y Flusser [2] el centroide (x_c, y_c) de una imagen RGB está definido como:

$$\begin{aligned} x_c &= m_{10}/m_{00} \\ y_c &= m_{01}/m_{00}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde m_{01}, m_{10} y m_{00} son los momentos geométricos de primer orden y orden cero respectivamente. Al ubicar el origen de coordenadas en el centroide (x_c, y_c) y mapear la imagen en el círculo unitario, se logra la invariancia a la traslación.

Por otro lado, el número de descriptores obtenidos dependen del orden máximo radial y angular en el cálculo de los momentos. El número total de momentos de Zernike está dado por:

$$\left(\frac{2 + Z_{max}}{2}\right)^2 Z_{max} par, \quad (9)$$

$$\left(\frac{1 + Z_{max}}{2}\right)^2 \left(\frac{3 + Z_{max}}{2}\right) Z_{max} impar, \quad (10)$$

donde Z_{max} se refiere al orden máximo.

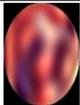
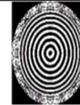
3. Experimentos y resultados

Los experimentos realizados se llevan a cabo en el programa Matlab versión R2016b. En el primer experimento se realiza la reconstrucción de la imagen "Lena" de tamaño 128×128 , el proceso de reconstrucción de imágenes en color se utiliza para evaluar la precisión de descripción y la estabilidad numérica que los momentos poseen. Se realiza una comparación de los diferentes modelos de clasificación para determinar el clasificador que mejor se adapta a los descriptores tipo momentos de Zernike. Para el análisis del desempeño de los clasificadores se utiliza la base de datos COIL-100 (Columbia Object Image Library), conformada por 7200 imágenes de tamaño 128×128 que se clasifica en 100 clases de objetos diferentes. Cada clase consiste en una imagen del objeto tomada desde un punto de vista diferente que varía desde el ángulo 0° a 360° con un incremento de ángulo de 5° . Se calculan las distintas medidas de distancia para evaluar la similitud entre imágenes ($L_1 - norm$, $L_2 - norm$, X_2 y $Canberra$) utilizadas en las publicaciones citadas [9,3] para extraer las características de las imágenes.

3.1. Reconstrucción de imágenes

La reconstrucción de imágenes ayuda a identificar el número de descriptores tipo momentos necesarios para representar una imagen en escala de grises o en color.

Tabla 1. Imagen de Lena reconstruida con ordenes de 0 a 150.

Max. Order	10	20	30	40	50	100	140	150
MMZ [3]								
	0.0524	0.0313	0.0228	0.0207	1.26e+05			
MMCF [3]								
	0.0356	0.0181	0.0116	0.0079	0.0056	0.0020	0.0017	0.0016
MMZ								
	0.0410	0.0233	0.0156	0.0109	0.0075	0.0015	7.564e-04	7.1287e-04

Mientras un orden menor tiene la capacidad de representar características generales de la imagen como área o forma, los órdenes superiores poseen la capacidad de representar detalles de esta. La distribución discreta reconstruida de una imagen RGB está dada por:

$$\tilde{f}_C(r, \theta) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n \phi_{nm} R_n^m(r) \exp(-jm\theta), \quad (11)$$

donde $\tilde{f}_C(r, \theta)$ es la imagen reconstruida y L es el orden máximo que se utiliza para la reconstrucción de una imagen.

La precisión en la reconstrucción se evalúa por medio del NIRE [7], definido como:

$$NIRE = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |f(i, j) - f'(i, j)|^2}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |f(i, j)|^2}. \quad (12)$$

Para medir el error de reconstrucción de una imagen a color se toma en cuenta el promedio de los tres canales:

$$MeanNIRE = \frac{NIRE_R + NIRE_G + NIRE_B}{3}. \quad (13)$$

Actualmente Darwish y Hosny presentan buenos resultados en la reconstrucción de imágenes con los momentos multicanal de Chebyshev-Fourier en comparación con los momentos multicanal de Zernike. Sin embargo, calculan los momentos con aproximaciones de primer orden y no con las aproximaciones más exactas que existen en la literatura. El cálculo de los momentos de Zernike se realiza mediante un esquema de píxeles polares propuesto por Xin y Liao [11]. Los resultados obtenidos en la reconstrucción de imágenes con ambos enfoques se muestran en la Tabla 1.

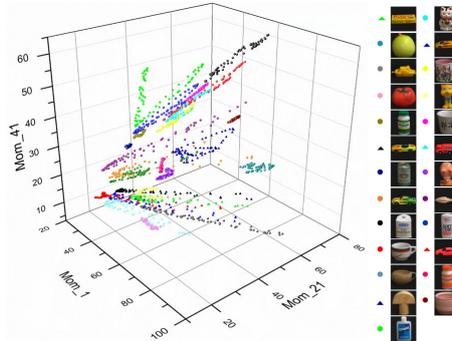


Fig. 1. Diagrama de dispersión para las primeras 25 clases de la base de datos COIL-100 en condiciones normales con MMZ.

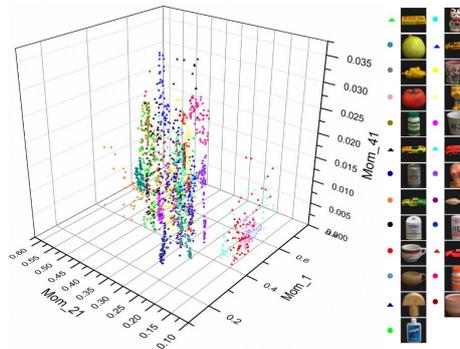


Fig. 2. Diagrama de dispersión para las primeras 25 clases de la base de datos COIL-100 en condiciones normales con MMCF.

3.2. Reconocimiento de imágenes utilizando clasificadores

Los modelos de clasificación son usados en minería de datos como una herramienta estratégica que permite ordenar, clasificar, filtrar y resumir todas las relaciones que un dato puede tener dentro de la información.

Para los modelos de clasificación se calculan los MMZ y los MMCF a la base de datos COIL-100 bajo condiciones normales, rotación aleatoria, escala y ruido, igualando a 60 la cantidad de descriptores obtenidos y se utiliza validación cruzada en el entrenamiento $KFold = 10$. Para evaluar los clasificadores se considera la exactitud en la clasificación que determina la proporción de ejemplos correctamente clasificados, se muestra el diagrama de dispersión para visualizar el desempeño del algoritmo empleado. Las medidas de distancia utilizadas en [9] y [3], se realizan con la base de datos COIL-100 dividida en dos conjuntos; en el primero, se toma la imagen frontal de cada clase y las 71 imágenes restantes se colocan en la base de datos de prueba. Por lo tanto, hay 100 imágenes en

el primer conjunto y 7100 imágenes en la base de datos de prueba. La tasa de reconocimiento $R(\%)$ está dada por $P \times 100/Q$ donde P es el número de imágenes reconocidas correctamente y Q es el número de imágenes utilizadas en la prueba [9].

Tabla 2. Parámetros utilizados para los modelos de clasificación.

Clasificador	Parámetros
Complex Tree	Número de Splits = 100
Medium Tree	Número de Splits = 20
Simple Tree	Número de Splits = 4
Linear Discriminant	
Quadratic Discriminant	
Linear SVM	
Quadratic SVM	
Cubic SVM	
Fine Gaussian SVM	Escala del kernel = 1.9
Medium Gaussian SVM	Escala del kernel = 7.7
Coarse Gaussian SVM	Escala del kernel = 31
Fine KNN	Número de vecinos = 1
Medium KNN	Número de vecinos = 10
Coarse KNN	Número de vecinos = 100
Cosine KNN	Número de vecinos = 10
Cubic KNN	Número de vecinos = 10
Weighted KNN	Número de vecinos = 10
Ensemble/Boosted Trees	
Ensemble/Bagged Trees	
Ensemble/Sub Discriminant	
Ensemble/Subspace KNN	
Ensemble/RUSBoosted Trees	
L_1 - norm KNN	Número de vecinos = 1
L_2 - norm KNN	Número de vecinos = 1
X^2 KNN	Número de vecinos = 1
Canberra KNN	Número de vecinos = 1

En la Tabla 2 se muestran los parámetros utilizados en los modelos de clasificación. En la Tabla 3 se muestran los resultados obtenidos para la clasificación de las imágenes en condiciones normales con MMZ y MMCF. En el siguiente experimento las imágenes de la base de datos COIL-100 son rotadas de forma aleatoria en ángulos entre 0° a 180° con un incremento fijo de 30° . Los resultados para la clasificación con rotación aleatoria se muestran en la Tabla 3. La base de datos consta de 100 clases distintas, sin embargo, para visualizar el comportamiento de los descriptores se incluyeron solamente 25 clases en los diagramas de dispersión. Las Figuras 1 y 2 muestran respectivamente el diagrama de dispersión para los MMZ y MMCF en condiciones normales.

En las Figuras 3 y 4 se observa el diagrama de dispersión para los MMZ y MMCF con rotación aleatoria. Para ejemplificar la invariancia a la a escala, la

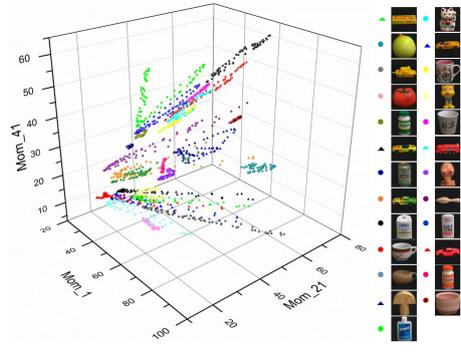


Fig. 3. Diagrama de dispersión para las primeras 25 clases de la base de datos COIL-100 en rotación aleatoria con MMZ.

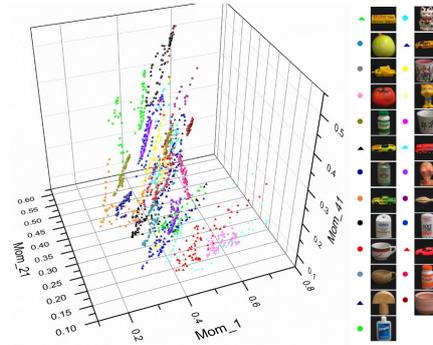


Fig. 4. Diagrama de dispersión para las primeras 25 clases de la base de datos COIL-100 en rotación aleatoria con MMCF.

base de datos COIL-100 es escalada con un factor $\lambda = 1.5$. Se evalúa la robustez al ruido añadiendo ruido Gaussiano con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 0,20$ a la base de datos. Los resultados de la clasificación con la base de datos a escala $\lambda = 1.5$ y con ruido Gaussiano añadido se muestran en la Tabla 4. Los diagramas de dispersión para los MMZ y MMCF con la base de datos a escala $\lambda = 1.5$ se muestran en las Figuras 5 y 6 respectivamente y en las Figuras 7 y 8 se muestran los diagramas de dispersión para MMZ y MMCF respectivamente para la base de datos con ruido Gaussiano.

4. Conclusiones

Los experimentos realizados con los momentos multicanal de Zernike presentan un desempeño superior para la reconstrucción de imágenes.

Tabla 3. Exactitud para los diferentes clasificadores con momentos multicanal de Zernike y Chebyshev-Fourier, Modelo de color RGB en condiciones normales y con rotación aleatoria

Clasificador	MMZ	MMCF	MMZ	MMCF
	Normal		Rotación aleatoria	
Complex Tree	46.7 %	48.4 %	46.8 %	48.4 %
Medium Tree	15.4 %	16.3 %	15.4 %	16.3 %
Simple Tree	4.6 %	4.9 %	4.6 %	5.0 %
Linear Discriminant	94.9 %	86.8 %	89.0 %	86.5 %
Quadratic Discriminant	98.9 %	92.4 %	95.2 %	92.2 %
Linear SVM	99.0 %	98.2 %	99.0 %	98.5 %
Quadratic SVM	99.7 %	99.2 %	99.7 %	99.3 %
Cubic SVM	99.7 %	99.3 %	99.7 %	99.3 %
Fine Gaussian SVM	78.9 %	58.1 %	78.9 %	57.9 %
Medium Gaussian SVM	99.7 %	99.1 %	99.7 %	99.1 %
Coarse Gaussian SVM	96.3 %	93.9 %	96.3 %	93.9 %
Fine KNN	99.9 %	93.9 %	99.9 %	99.4 %
Medium KNN	96.2 %	94.8 %	96.2 %	94.6 %
Coarse KNN	71.8 %	72.4 %	72.0 %	72.3 %
Cosine KNN	96.2 %	94.1 %	96.2 %	94.1 %
Cubic KNN	95.5 %	93.8 %	95.5 %	93.6 %
Weighted KNN	98.9 %	97.8 %	98.9 %	97.8 %
Ensemble/Boosted Trees	39.2 %	39.2 %	39.2 %	38 %
Ensemble/Bagged Trees	99.2 %	98.4 %	99.2 %	98.3 %
Ensemble/Sub Discriminant	93.7 %	91.4 %	93.8 %	91.3 %
Ensemble/Subspace KNN	99.9 %	99.2 %	99.9 %	99.3 %
Ensemble/RUSBoosted Trees	17.6 %	16.4 %	16.5 %	16.8 %
$L_1 - norm$	68.69 %	59.56 %	60.70 %	49.63 %
$L_2 - norm$	68.39 %	54.14 %	68.39 %	25.74 %
X^2	63.14 %	49.14 %	63.16 %	23.22 %
<i>Canberra</i>	61.83 %	49.05 %	61.83 %	34.66 %

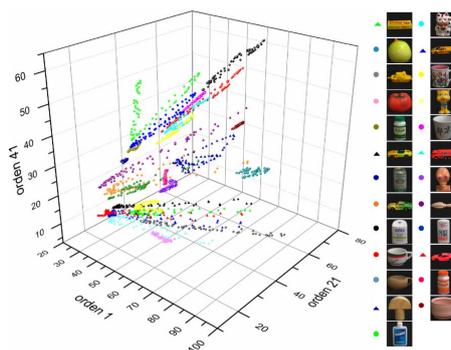


Fig. 5. Diagrama de dispersión para las primeras 25 clases de la base de datos COIL-100 escala con MMZ.

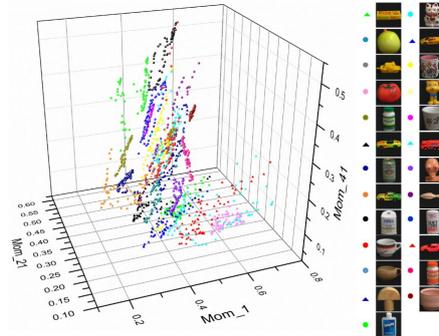


Fig. 6. Diagrama de dispersión para las primeras 25 clases de la base de datos COIL-100 a escala con MMCF.

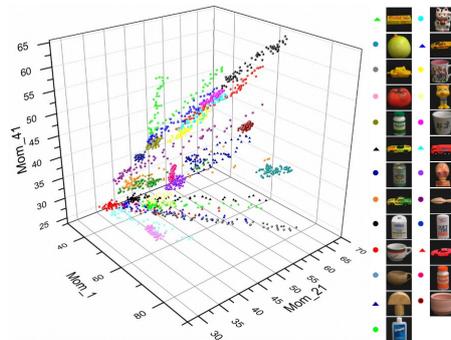


Fig. 7. Diagrama de dispersión para las primeras 25 clases de la base de datos COIL-100 con ruido Gaussiano con MMZ.

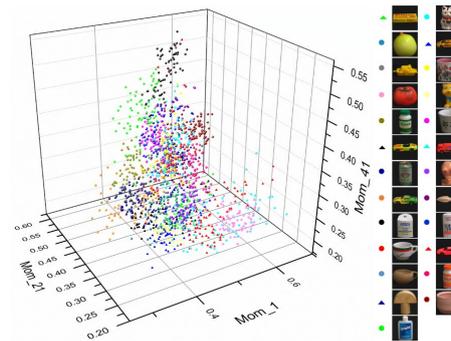


Fig. 8. Diagrama de dispersión para las primeras 25 clases de la base de datos COIL-100 con ruido Gaussiano con MMCF.

Tabla 4. Exactitud para los diferentes clasificadores con Momentos Multicanal de Zernike y Chebyshev-Fourier, Modelo de color RGB con ruido Gaussiano $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 0,20$

Clasificador	MMZ	MMCF	MMZ	MMCF
	Escala	$\lambda = 1,5$	Ruido	Gaussiano
Complex Tree	46.8 %	47.8 %	49.0 %	34.9 %
Medium Tree	16.5 %	16.4 %	14.7 %	14.1 %
Simple Tree	4.6 %	4.9 %	4.6 %	4.2 %
Linear Discriminant	88.9 %	86.6 %	87.9 %	75.7 %
Quadratic Discriminant	95.1 %	92.3 %	94.3 %	78.2 %
Linear SVM	99.1 %	98.3 %	98.2 %	81.3 %
Quadratic SVM	99.8 %	99.1 %	99.1 %	83.2 %
Cubic SVM	99.7 %	99.2 %	99.1 %	81.9 %
Fine Gaussian SVM	78.5 %	58.0 %	5.9 %	3.5 %
Medium Gaussian SVM	99.8 %	99.0 %	98.9 %	79.0 %
Coarse Gaussian SVM	96.4 %	93.9 %	94.3 %	71.9 %
Fine KNN	99.9 %	99.4 %	99.5 %	71.3 %
Medium KNN	96.0 %	94.5 %	96.0 %	72.7 %
Coarse KNN	72.2 %	72.1 %	72.3 %	63.8 %
Cosine KNN	96.2 %	94.1 %	95.7 %	71.1 %
Cubic KNN	95.7 %	93.5 %	95.3 %	68.2 %
Weighted KNN	99.0 %	97.8 %	97.9 %	74.9 %
Ensemble/Boosted Trees	38.2 %	37.9 %	35.6 %	22.1 %
Ensemble/Bagged Trees	99.1 %	98.4 %	98.4 %	78.7 %
Ensemble/Sub Discriminant	93.7 %	91.2 %	92.6 %	80.5 %
Ensemble/Subspace KNN	99.9 %	99.3 %	99.8 %	83.8 %
Ensemble/RUSBoosted Trees	98.7 %	15.9 %	99.6 %	16.6 %
$L_1 - norm$	68.64 %	49.61 %	68.64 %	49.61 %
$L_2 - norm$	68.35 %	25.73 %	68.35 %	25.73 %
X^2	63.17 %	23.28 %	63.17 %	23.28 %
<i>Canberra</i>	61.71 %	34.67 %	61.71 %	34.67 %

Los MMZ calculados poseen una mayor estabilidad numérica en órdenes superiores. Se determina como mejor opción para los descriptores de tipo momento el modelo de clasificación Ensemble/Subspace KNN el cual logra una exactitud de clasificación del 99.9% en condiciones normales, este porcentaje de exactitud se mantiene con la base de datos rotada aleatoriamente, con escala $\lambda = 1,50$ e incluso con ruido Gaussiano $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 2,0$. Los diagramas de dispersión se realizaron con los descriptores 1, 21 y 41 lo que equivale al primer descriptor de cada canal de color, lo cual demuestra que es posible realizar la clasificación con momentos multicanal de bajo orden. Los modelos de clasificación logran una mayor exactitud en comparación con las medidas de distancia utilizadas en [9] y [3]. Las pruebas realizadas con momentos multicanal de Chebyshev-Fourier, realizadas igualmente con 60 descriptores obtienen de igual forma el mayor porcentaje de exactitud con el modelo Ensemble/Subspace KNN; 99,3% de exactitud en condiciones normales, rotada aleatoriamente y con escala $\lambda = 1,50$.

La prueba con ruido Gaussiano $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 2,0$ obtiene una exactitud de 83,8 % en el mismo modelo de clasificación confirmando el buen rendimiento del modelo.

Referencias

1. Camacho-Bello, C., Toxqui-Quitl, C., Padilla-Vivanco, A., Báez-Rojas, J.: High-precision and fast computation of jacobi-fourier moments for image description. *JOSA A* (2014)
2. Flusser, J., Zitova, B., Suk, T.: Moments and moment invariants in pattern recognition. John Wiley & Sons (2009)
3. Hosny, K.M., Darwish, M.M.: New set of multi-channel orthogonal moments for color image representation and recognition. *Pattern Recognition* (2019)
4. Janssen, A.J., Dirksen, P.: Computing zernike polynomials of arbitrary degree using the discrete fourier transform. *Journal of the European Optical Society-Rapid publications* (2007)
5. Khotanzad, A., Hong, Y.H.: Invariant image recognition by zernike moments. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence* (1990)
6. Prata, A., Rusch, W.: Algorithm for computation of zernike polynomials expansion coefficients. *Applied Optics* (1989)
7. Rivera-López, J., Camacho-Bello, C., et al.: Color image reconstruction by discrete orthogonal moment. *Journal of Data Analysis and Information Processing* (2017)
8. Shakibaei, B.H., Paramesran, R.: Recursive formula to compute zernike radial polynomials. *Optics letters* (2013)
9. Singh, C., Singh, J.: Multi-channel versus quaternion orthogonal rotation invariant moments for color image representation. *Digital Signal Processing* (2018)
10. Teague, M.R.: Image analysis via the general theory of moments. *JOSA* (1980)
11. Xin, Y., Pawlak, M., Liao, S.: Accurate computation of zernike moments in polar coordinates. *IEEE Transactions on Image Processing* (2007)