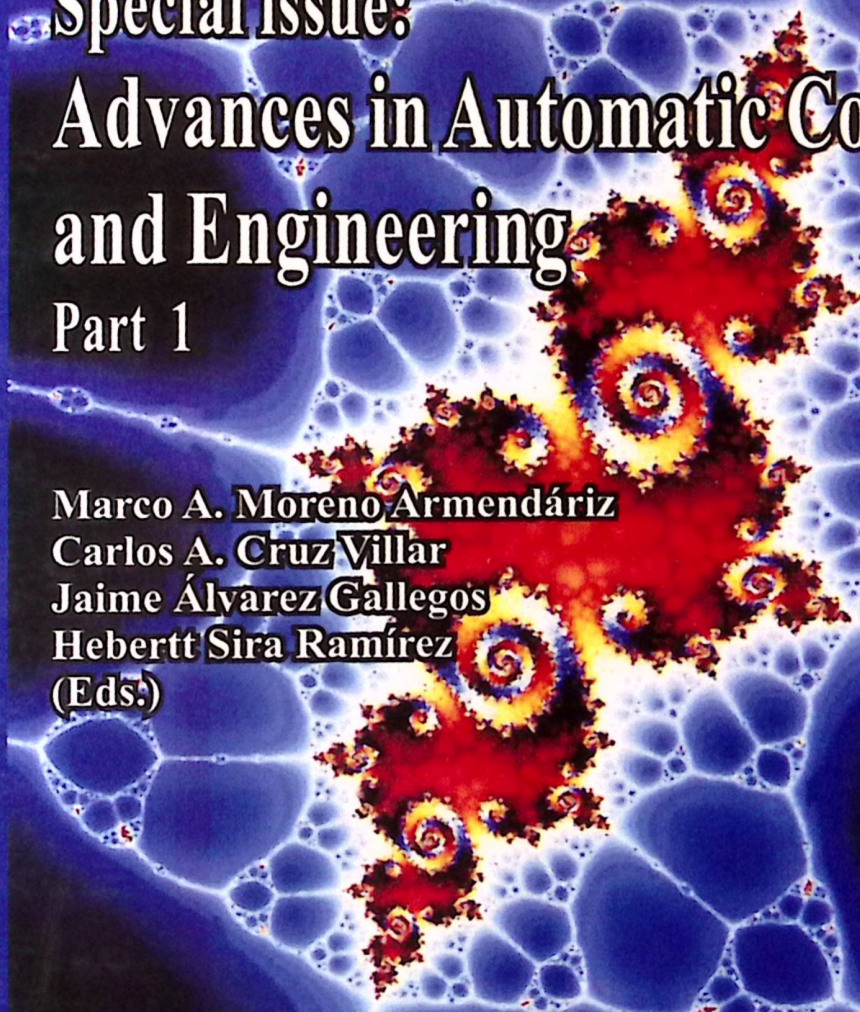
RESEARCH IN COMPUTING SCIENCE

ISSN: 1870-4069

Special issue:
Advances in Automatic Control and Engineering
Part 1

Marco A. Moreno Armendáriz
Carlos A. Cruz Villar
Jaime Álvarez Gallegos
Hebertt Sira Ramírez
(Eds.)



Vol. 36

50 años de cómputo México

RCS Research in Computing Science

Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering

Part 1

Research in Computing Science

Series Editorial Board

Comité Editorial de la Serie

Editors-in-Chief:

Editores en Jefe

Juan Humberto Sossa Azuela (Mexico)
Gerhard Ritter (USA)
Jean Serra (France)
Ulises Cortés (Spain)

Associate Editors:

Editores Asociados

Jesús Angulo (Frane)
Jihad El-Sana (Israel)
Jesús Figueroa (Mexico)
Alexander Gelbukh (Russia)
Ioannis Kakadiaris (USA)
Serguei Levachkine (Russia)
Petros Maragos (Greece)
Julian Padget (UK)
Mateo Valero (Spain)

Editorial Coordination:

Coordinación Editorial

Blanca Miranda Valencia

Formatting:

Formación

Salvador Godoy Calderón
Ma. Eugenia Moreno Reyes
Rocío Soto Santos
Leticia Tate Morales

Research in Computing Science es una publicación trimestral, de circulación internacional, editada por el Centro de Investigación en Computación del IPN, para dar a conocer los avances de investigación científica y desarrollo tecnológico de la comunidad científica internacional. **Volumen 36**, Octubre, 2008. Tiraje: 500 ejemplares. *Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo del Título* No. 04-2004-062613250000-102, expedido por el Instituto Nacional de Derecho de Autor. *Certificado de Licitud de Título* No. 12897, *Certificado de licitud de Contenido* No. 10470, expedidos por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas. El contenido de los artículos es responsabilidad exclusiva de sus respectivos autores. Queda prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio, sin el permiso expreso del editor, excepto para uso personal o de estudio haciendo cita explícita en la primera página de cada documento. Impreso en la Ciudad de México, en los Talleres Gráficos del IPN – Dirección de Publicaciones, Tres Guerras 27, Centro Histórico, México, D.F. Distribuida por el Centro de Investigación en Computación, Av. Juan de Dios Bátiz S/N, Esq. Av. Miguel Othón de Mendizábal, Col. Nueva Industrial Vallejo, C.P. 07738, México, D.F. Tel. 57 29 60 00, ext. 56571.

Editor Responsable: *Juan Humberto Sossa Azuela*, RFC *SOAJ560723*

***Research in Computing Science** is published by the Center for Computing Research of IPN. **Volume 36**, October, 2008. Printing 500. The authors are responsible for the contents of their articles. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of Centre for Computing Research. Printed in Mexico City, October, 2008, in the IPN Graphic Workshop – Publication Office.*

Volume 36

Volumen 36

Special Issue:
Advances in Automatic Control and Engineering

Part 1

Volume Editors:
Editores del Volumen

Marco A. Moreno Armendáriz
Carlos A. Cruz-Villar
Jaime Álvarez Gallegos
Hebertt Sira Ramírez

Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Computación
México 2008









ISSN: 1870-4069

Copyright © 2008 Instituto Politécnico Nacional
Copyright © 2008 Instituto Politécnico Nacional

Instituto Politécnico Nacional (IPN)
Centro de Investigación en Computación (CIC)
Av. Juan de Dios Bátiz s/n esq. M. Othón de Mendizábal
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", Zacatenco
07738, México D.F., México

http://www.ipn.mx
http://www.cic.ipn.mx

Indexed in LATINDEX and PERIODICA
Indexada en LATINDEX y PERIODICA

Printing: 500
Tiraje: 500

Printed in Mexico
Impreso en México

Preface

Este volumen contiene 72 artículos cuidadosamente seleccionados de diversos autores que pertenecen a diferentes universidades de México que tienen un gran prestigio en esta área de estudio. Estos trabajos presentan los desarrollos más recientes en un amplio rango de áreas relacionadas con el Control Automático. Para su mejor lectura se encuentran ordenados en 16 campos temáticos que son:

- Factibilidad de los Sistemas de Diagnóstico de Fallas
- Estimación e Identificación
- Control de Procesos
- Control de sistemas Mecánicos
- Sistemas de Potencia I y II
- Control de Robots I y II
- Control Discontinuo
- Sincronización y caos
- Control no Lineal de Máquinas Eléctricas
- Control de Sistemas Biomédicos
- Control de Sistemas Mecatrónicos
- Control Difuso y Neuronal
- Control de Sistemas Aeroespaciales
- Desarrollo de Software en la Ingeniería de Control

Este volumen le será muy útil a investigadores, estudiantes y al público en general que estén interesados en conocer a fondo el estado del arte de las investigaciones que en el área de control automático se desarrollan actualmente en nuestro país.

Marco A. Moreno Armendáriz
Carlos A. Cruz-Villar
Jaime Álvarez Gallegos
Hebertt Sira Ramírez

Octubre 2008

Table of Contents
Índice

Page/Pág.

Factibilidad de los Sistemas de Diagnóstico de Fallas

Identificación de fallas en un intercambiador de calor 3
Celina Rea, Cristina Verde, Rubén Morales-Menéndez

Análisis estructural del motor de inducción de rotor devanado para diagnóstico de fallas eléctricas 13
Juan A. Mejía, Nancy Visairo, and Ricardo Álvarez

Análisis estructural para la generación de residuos: consideraciones para la implementación 23
Marino Sánchez Parra, Cristina Verde, Dionisio A. Suárez Cerda

Diagnóstico de fallas del sistema COSY mediante redes de Petri híbridas 33
José E. Martínez-Prieto, Carlos D. García-Beltrán, Dionisio A. Suárez-Cerda

Análisis estructural para diagnóstico de fallas en un sistema de inversores en paralelo 43
Víctor E. Espinoza, Nancy Visairo, Víctor Cárdenas

Diagnóstico de fallas de interruptor abierto en inversores PWM para variadores de velocidad 53
D. R. Espinoza-Trejo, D. U. Campos-Delgado y S. Martínez-Regil

Estimación e Identificación

Identificación y control adaptable aplicados a un motor de corriente directa 65
William Torres Hernández, Rosalío Farfán Martínez, José A. Ruiz Hernández, José L. Rullán Lara, Ramón García Hernández, Dionisio A. Suárez Cerda

Un enfoque algebraico-diferencial para la estimación de las corrientes del rotor en el motor de inducción 75
Flor Silva, Carlos García, Alejandro Rodríguez

Dissipative design of PI-Observers for nonlinear systems 85
Jaime A. Moreno

Velocity estimation using adaptive observers 95
Marcos A. Gónzález Olvera and Yu Tang

Control de Procesos

Modelado e identificación del proceso de sulfato reducción en el tratamiento biológico de aguas residuales 107

Jorge Lenin Ruiz, Jaime A. Moreno, Germán Buitrón y Jaime González
Dissipative observer design for bioprocesses 117
Jaime A. Moreno
Determinación del valor óptimo de gas de inyección para un sistema de producción de petróleo crudo mediante redes neuronales 127
G. Jiménez de la Cruz, José A. Ruz Hernández, Evgen Shelomov, Rubén Salazar Mendoza
Diseño asistido por computadora de controladores PID estabilizantes..... 137
Cristina Verde, Rolando Carrera and Shankar Bhattacharyya
Port-based models for real-time supervision and diagnosis during oilwell acid stimulations..... 147
Ricardo Lopezlena

Control de Sistemas Mecánicos

Estimation and analysis of the reachability region in bilinear mechanical systems..... 159
V. R. Nosov, J. A. Meda-Campaña and J.C. Gómez-Mancilla
Instalación experimental para estudiar la interacción llanta-pavimento 169
Jeannette Aguilar-Martínez y Luis Álvarez-Icaza
Control basado en pasividad de un doble péndulo subactuado con efectos de fricción dinámicos 179
Cecilia Cornejo-Romero y Luis Álvarez-Icaza
Modelado y estrategia de control para un sistema de propulsión híbrido paralelo 189
Alfonso Pantoja-Vázquez y Luis Álvarez-Icaza
Evaluación experimental de controladores tipo PID de posición aplicados a un sistema de suspensión magnética..... 199
Javier Ollervides, Alfredo Camarillo, Víctor Santibáñez y Alejandro Dzul

Sistemas de Potencia I

El efecto de la resistencia serie equivalente de los capacitores en los convertidores cuadráticos 211
Luis Humberto Díaz-Saldierna, Jesús Leyva-Ramos, Ma. Guadalupe Ortiz-López y Juan Manuel García-Ibarra
Modelo para la potencia de una turbina eólica..... 221
Juvenal Villanueva Maldonado y Luis Álvarez-Icaza
Estrategias activas y pasivas para el ahorro eléctrico en viviendas 231
Julio César Ávila y José de Jesús Rodríguez
Modelado y simulación de un generador de inducción tipo jaula de ardilla..... 241
Aldo Sánchez, Gerardo Guerrero, Manuel Adam

Control de Robots I

Compensación adaptable de fricción dinámica en robots manipuladores 253
Juan C. Martínez-Rosas y Luis Álvarez-Icaza
Aplicación de un control no lineal basado en pasividad a una mano robot 263
Cornelio Morales Morales, Marco A. Oliver Salazar
Evasión de obstáculos en línea para manipuladores redundantes con restricciones 275
Rogelio Portillo, Carlos A. Cruz and Alejandro Rodriguez
A practical PID controller with bounded torques for robot manipulators 285
Víctor Santibáñez, Karla Camarillo, Javier Moreno-Valenzuela and Ricardo Campa

Control Discontinuo

Funciones de Lyapunov para algoritmos de modos deslizantes de segundo orden: un enfoque disipativo 297
Marisol Osorio y Jaime Moreno
Evaluación experimental de controladores no lineales vía linearización exacta y modos deslizantes aplicados en un sistema de levitación magnética 307
Alfredo Camarillo, Javier Ollervides, Alejando Dzul y Víctor Santibáñez
Estabilización de un péndulo invertido sobre base móvil mediante control híbrido 317
R. Murueta Fortiz, W. F. Guerrero Sánchez, V. V. Alexandrov, J. F. Guerrero Castellanos

Sincronización y caos

Synchronization in nonlinear systems under multiplicative perturbations over its linear parts 329
D. Becker-Bessudo, G. Fernández-Anaya, and J. J. Flores-Godoy
On the transitions between dynamical behaviors for small-world and scale-free networks 339
J. G. Barajas Ramírez and R. Femat
Synchronization of a class of nonlinear time-delay systems applied to two unidirectionally coupled external cavity laser diodes 349
O. Hugues-Salas, K. A. Shore, S. P. Banks and D. A. Díaz-Romero

Control no Lineal de Máquinas Eléctricas

Power systems stabilization using high order sliding models 361
J. de León-Morales, M. T. Mata-Jiménez , M. F. Escalante, and L. Fridman
Position regulation for a geared DC motor based on a bounded neurocontrol 371

J. Reyes-Reyes, C. M. Astorga-Zaragoza, G. V. Guerrero-Ramírez, A. Adam-Medina
Control vectorial de un motor de inducción con carga desconocida basado en un nuevo observador no lineal 381
Marco Antonio Gallegos, Ricardo Álvarez Salas, Jaime A. Moreno y Gerardo Espinosa-Pérez
Output-feedback IDA control of a thyristor controlled series capacitors..... 391
G. Espinosa-Pérez, P. Maya-Ortiz, A. Doria-Cerezo, and J. A. Moreno

Control de Sistemas Biomédicos

Stabilization of a class of biomedical systems via stability preservation..... 403
G. Solis-Perales, E. Ruiz-Velázquez, R. Femat, and G. Fernández-Anaya
Una aproximación algebraica de observabilidad para un sistema de diabetes mínimo..... 413
G. Solis-Perales, R. Aguilar-López, R. Femat, and R. Martínez-Guerra
Blood glucose regulation for hyperglycemic condition in Type I Diabetic Patients..... 423
Eduardo Ruiz-Velázquez, Ricardo Femat, and Griselda Quiroz
Control de glucemia en escenarios metabólicos de ejercicio e hipoglucemia en Diabetes Mellitus 431
G. Quiroz y R. Femat
Oportunidades para modelar y controlar enfermedades que afectan al ganado bovino en México 441
Enrique Herrera-López, Ciro Estrada-Chávez, Dulce Díaz-Montaño, Gabriel Huitrón-Márquez, Gabriela Huitrón-Nieto, Ricardo Femat

Sistemas de Potencia II

Implementación experimental de un controlador de velocidad para el motor de corriente directa empleando una herramienta en tiempo real 453
Rubén Salas-Cabrera, Aarón González-Rodríguez, Jonathan Mayo-Maldonado, Erika Rendón-Fraga, Nacú Salas-Cabrera
Cancelación de armónicos de voltaje en sistemas monofásicos utilizando un convertidor matricial..... 463
Josué Reyes, Víctor Cárdenas, Tonatiuh Echegoyen
Control de un convertidor elevador cuadrático P^2R^2 de CD-CD 473
J. A. Morales-Saldaña, R. Loera-Palomo, E. E. Carbajal-Gutiérrez and J. Leyva-Ramos
Control tolerante a fallas mediante control predictivo basado en modelo aplicado al conjunto inversor-motor 483
C. Antonio Reyna López, L. Gerardo Vela Valdés, A. Claudio Sánchez

Control de Robots II

Control de un robot usando redes neuronales analógicas 495
Enrique Martínez Peña, Wilberth Melchor Alcocer Rosado, Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, Luis Gerardo Vela Valdés
Hybrid controller design for linearized robotic manipulators 505
Braulio Cruz-Jiménez, Luis Ricalde, Lizbeth Ayala
Diseño concurrente estructura-control para robots paralelos 515
M. G. Villareal Cervantes, C. A. Cruz Villar, and J. Álvarez Gallegos
Experimental attitude estimation for mobile robots with acceleration profiles 525
I. Estrada-Sánchez, H. Rodríguez-Cortés and M. Velasco-Villa

Control de Sistemas Mecatrónicos

Control activo de maquinaria rotatoria 537
A. Blanco-Ortega, F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro, H. Méndez-Azúa
Balanceo activo para el control de vibraciones en maquinaria rotatoria 547
A. Blanco-Ortega, F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro, H. Méndez-Azúa
Control por modos deslizantes y PI generalizado de suspensiones activas de un cuarto de automóvil 557
E. Chávez-Conde, F. Beltrán-Carbajal, A. Blanco-Ortega, and H. Méndez-Azúa
Control supervisorio difuso aplicado a un manipulador tipo Delta 567
Pedro A. Juárez, Antonio Favela, Gilberto Reynoso, and Gabriel Rosales
3D dynamic haptic rendering based on orthogonal decomposition: control, stability analysis and experimental results 577
Gabriel Sepúlveda-Cervantes, Vicente Parra-Vega, Omar A. Domínguez-Ramírez

Control Difuso y Neuronal

Diseño de memorias asociativas implementadas con redes neuronales recurrentes para el reconocimiento de caracteres 589
José A. Ruz Hernández, Carlos C. Bustillo Argáez, María U. Suárez Durán, Edgar N. Sánchez Camperos, Evgen Shelomov
Estudio de modelos de Diabetes Mellitas por medio de un Neuro Observador Diferencial 599
Raúl Robles, Alonso Peña, Agustín Cabrera
Control difuso híbrido para una clase de sistemas no lineales con saturación en la entrada 609
M. C. Rodríguez-Liñan and E. Palacios
Recurrent neural control for wind turbine systems 619
Luis J. Ricalde, Braulio Cruz and Edgar N. Sánchez
Programación de ganancias de controladores PI con sistemas difusos 629

Control de Sistemas Aeroespaciales

Control de posición por modos de deslizantes de un helicóptero de tres grados de libertad 641
Konstantin K. Starkov, Luis T. Aguilar, and Yury Orlov
Simulador para un helicóptero cuadri-rotor 651
Luis Arturo García Delgado, Juan Gerardo Castrejón Lozano, and Alejandro Enrique Dzul López
Nonlinear attitude control for a picosatellite 661
J. R. Córdova Alarcón, E. Vicente Vivas and H. Rodríguez Cortés
Global attitude control of rigid bodies without attitude estimation and velocity measurement 671
J. F. Guerrero-Castellanos, B. B. Salmerón-Quiróz, J. P. Sánchez-Santana, W. F. Guerrero-Sánchez
Lanzamiento optimal de un avión 681
W. F. Guerrero-Sánchez, Maribel Reyes-Romero, V. V. Aleksandrov, F. F. Guerrero-Castellanos

Desarrollo de Software en la Ingeniería de Control

Desarrollo de una interfaz para la comunicación entre un sistema experto y un sistema multi-agente en tiempo real no crítico 693
Fernando Orduña Cabrera, Valeria Javalera Rincón, Luis M. Pellegrin Zazueta, Ariadna J. Magallanes Lugo, and Samuel González López
Use of object-oriented languages in control engineering 703
Fernando Valles-Barajas and Walter Schaufelberger
Real-time computer system for supervision and diagnosis during oilwell acid stimulations 713
Ricardo Lopezlena
Plataforma portátil inalámbrica para el monitoreo de procesos en tiempo real 723
J. M. Luna-Rivera and E. Palacios
Observador de alta ganancia constante para una clase de sistema no lineal de forma triangular 733
Adriana Aguilera-González, Adriana Téllez-Anguiano, Carlos Astorga-Zaragoza, David Juárez-Romero
Técnica de detección de fallas en dispositivos de potencia para un inversor-motor tolerante a fallas 743
M. A. Rodríguez, A. Claudio, D. Theilliol, L. G. Vela, G. Guerrero

Author Index 753
Índice de autores

Editorial Board of the Volume..... 755
Comité editorial del volumen

Factibilidad de los Sistemas de Diagnóstico de Fallas

Identificación de Fallas en un Intercambiador de Calor

Celina Rea[β], Cristina Verde[α], Ruben Morales-Menendez[γ]

[α]UNAM, Instituto de Ingeniería
verde@servidor.unam.mx
Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey
[β]Programa de Graduados en Ingeniería
[γ]Dirección Asociada de Investigación
{A00608453, rmm}@itesm.mx

Abstract. Se propone el uso de Análisis de Componentes Principales Dinámicos (*DPCA*) para realizar detección de fallas en un Intercambiador de Calor (*IC*) industrial. Tomando datos de operación nominal, se generó una matriz dinámica con un retraso en las mediciones, obteniendo así los componentes principales y valores de variabilidad que describen al sistema. Con esta información se modelan las condiciones normales del proceso y vía umbrales estadísticos, se reconocen las fallas en los sensores. El residuo en el subespacio de las componentes residuales, permitirá identificar la falla: *DPCA* podrá diagnosticar. Se implementan fallas en el *IC* para emular desperfectos en los sensores, observando su proyección en los espacios principales y residuales, así como el diagnóstico de la variable que contribuye a maximar el residuo donde sucedió la falla.

Palabras clave: Análisis de Componentes Principales Dinámicos, Detección de Fallas, Tablas de Contribución Residual.

1 Introducción

La administración de eventos anormales, en un sistema de control supervisorio, tiene como objetivo detectar la causa original de estos y realizar acciones para llevar al proceso al punto normal de operación. Si bien las tareas de control se han automatizado, gran parte de los manejos de situaciones anómalas reside en operadores. Estadísticas industriales demuestran que el 70% de los accidentes en la industria son causados por errores humanos [1]. El diagnóstico se dificulta al tener cientos de variables de proceso, además de contar con información insuficiente e incompleta debido a fallas o sesgos en la instrumentación del proceso.

Se tienen diferentes enfoques para la detección y diagnóstico de fallas. Hay tres grandes enfoques basados en: modelos *cuantitativos*, modelos *cualitativos* y basados en el *historial* de operación del proceso [2]. La mayoría de los trabajos basados en modelos *cuantitativos* sólo aplican a sistemas univariables y lineales, limitando su efectividad.

Los trabajos basados en modelos *cualitativos*, requieren del entendimiento físico o químico del proceso, como grafos bipartitas y las búsquedas topográficas

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Sciencie 36, 2008, pp. 3-12

y sintomáticas. No siempre garantiza la identificación y requiere gran manejo computacional.

Los métodos basados en el *historial* de operación del proceso intentan extraer la máxima información de archivos de datos y requieren un conocimiento mínimo del comportamiento del proceso. Aquí se encuentra el método de análisis de Componentes Principales (PCA), el cual permite transformar los datos obtenidos directamente del proceso en un espacio de menor dimensión y mantiene la información importante del proceso [3]. Al usar PCA se asume que las muestras actuales son estadísticamente independientes de las anteriores, lo cual es generalmente inválido para procesos de carácter dinámico, pues se tienen correlaciones y autocorrelaciones que necesitan ser tomadas en cuenta para describir la variabilidad de forma completa [4].

Se han desarrollado diversos trabajos y aplicaciones relacionados a este estudio. En [5], para determinar el estado de los sensores se utiliza el indicador *Sensor Validity Index* en un proceso de tratamiento de aguas residuales, con resultados mejores que al utilizar PCA. [6] utiliza PCA para monitorear las explosiones en reactores , indica que el estadístico Q es más sensible a desviaciones en la instrumentación que el T^2, pues representa las relaciones implícitas entre variables. En [7], se estandarizan los datos en línea al estimar nuevos valores medios para evitar la generación de falsas alarmas, identificando correctamente obstrucciones en las tuberías de tanques interconectados.

Por otra parte, poco se ha reportado sobre las aplicaciones en intercambiadores de calor (IC) . En [8] se propone un algoritmo para pronósticar un muestreo adelante la distribución de probabilidad de fallas o estados del IC. La estimación se basa en el algoritmo *Rao-Blackwell Particle Filtering* [9], el resultado se introduce para ajustar el sistema de control del proceso. En [10] la generación de residuos estructurados permite identificar fallas en el proceso, sin diagnosticar al elemento en disfunción. Existe un estudio basado en técnicas estadísticas presentado por [11], donde se utiliza PCA para evaluar el funcionamiento correcto de un reactor de colada continua. Se simula una falla cambiando el coeficiente de transferencia de calor del IC.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se incluye un análisis de Componentes Principales Dinámicos ($DPCA$). En la sección 3 se muestra el algoritmo de detección mientras que en la sección 4 se describe el algoritmo de diagnóstico. La sección 5 muestra el sistema experimental basado en un Intercambiador de Calor Industrial. En la sección 6 se presentan y discuten los resultados. Finalmente, en la sección 7 se incluyen las conclusiones y áreas de oportunidad identificadas en este trabajo.

2 Análisis de Componentes Principales Dinámicos

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto de datos compuesto de n_t observaciones de p variables que forman parte de un proceso. En éste, puede haber variables tanto de entrada como de salida. El conjunto $\mathcal{X}$ se puede describir por la matriz:

$$\tilde{X}(t) = [X_1(t)\ X_2(t)\ ...X_p(t)]_{(n_t \times p)} \tag{1}$$

Se asume que cada serie de datos p es estacionaria, en el sentido que sus medias y desviaciones estándares permanecen casi constantes para cada intervalo de tiempo. Si el proceso tiene carácter dinámico, existirá una dependencia temporal pues el valor actual de cada variable dependerá de valores pasados. Para incluir la correlación de los datos, se debe de aumentar el espacio de la columna de la matriz X para generar un mapa estático de las relaciones dinámicas, donde el aumento w es la cantidad de retrasos a incluir.

$$X(t) = [X_1(t) \ldots X_1(t-w)\, X_p(t) \ldots X_p(t-w)]_{(n_t \times (p \cdot [w+1]))} \qquad (2)$$

Al realizar *PCA* en una matriz aumentada, un modelo Auto-Regresivo se extrae directamente de los datos. Para un enfoque multi variable, las variables medidas pueden estar en diferentes rangos de valores o unidades, por lo que es conveniente estandarizar los datos alrededor de sus respectivas medias y desviaciones estándares para obtener una matriz de datos estandarizada X_S con media cero y varianza unitaria, $X_{S_{ij}} \triangleq (X_{ij}(t) - \mu_j)/\sigma_j$ para i=1,...,n_t y j=1,...,$p \cdot [w+1]$, donde μ_j es la media del j-ésimo componente de $\tilde{X}(t)$, que se asume invariante ante translaciones de tiempo; similarmente σ_j representa la desviación estándard del j-ésimo componente de $\tilde{X}(t)$.

Al aplicar la técnica de *PCA* sobre la matriz de datos estandarizada X_s se realiza DPCA. Este algoritmo descompone el espacio de las variables con base en la variabilidad de éstas y las ordena de la mayor variabilidad a la menor y permite alcanzar una reducción dimensional. Al obtener los componentes principales, se tiene una transformación lineal de las variables originales a un nuevo conjunto de variables que no están correlacionadas entre ellas. Para esto, se deberá de obtener la matriz de correlación R, de la cual se obtendrán los valores λ y vectores propios, generada por $R = (X_S X_S')/(n_t - 1)$ siendo λ_i y v_i los valores y vectores propios de R, con $\lambda_i \geq 0$, debido a que R es positiva semidefinida por construcción. Con DPCA se descompondra a la matriz X_S en $X_S = t_1 v_1^t + \ldots + t_p v_p^t + E$ con $V^T V = I$. La matriz V es la matriz de vectores de carga. Los vectores propios que se obtienen de V, ordenados de forma decreciente gracias a la magnitud de sus valores propios, formarán ahora dos matrices: $V_{[1,k]}$ que será la transformación de componentes principales y $V_{[k+1,p]}$, la de transformación de los componentes residuales. La matriz E contiene los componentes de la varianza de la matriz X_S que no se explican con $T_K V_k^T$.

El método gráfico *SCREE* (traducción literal de la palabra pedregal al idioma inglés) permite determinar la cantidad de componentes principales a retener, como fue propuesto por [12], graficando los valores propios de la matriz de covarianza R. Los más significativos y los más pequeños, estarán separados por el punto de inflexión, el cual indica la cantidad de componentes principales k a retener.

3 Detección de Fallas

La primera tarea para el monitoreo de un proceso es la detección de una falla. Los estadísticos que representan la variabilidad en el espacio de componentes

principales y residuales son los de *Hotelling* T^2 y Squared Prediction Error, (SPE), también conocido como el estadístico Q.

La matriz de transformación que permite realizar la proyección al espacio con mayor variabilidad o de componentes principales es $Y = X_S V_k$. Con ésta, se podra proyectar los datos a un espacio multivariado. Para detectar una falla, se deberá de trasladar esta información a un espacio univariable. El estadístico de Hotelling T^2 permite caracterizar el comportamiento normal de un proceso, con el propósito de realizar monitoreo en tiempo real y detección de fallas.

El parámetro estadístico de *Hotelling*, se obtiene como $T^2_{X_{S_i}} = X_{S_i} S_k^{-1} X_{S_i}^T$ donde X_{S_i} es la i-esima observación de la matriz X_S, mientras S_k es una matriz diagonal con los primeros k valores propios obtenidos de la matriz R.

Con esto, se puede definir un umbral de condición nominal. Un valor T^2 mayor a esta condición T^2_α indicará un evento de fallo.

$$T^2_\alpha = \frac{(n_t - 1)k}{n_t - k} F_\alpha(k, n_t - k) \tag{3}$$

$F_\alpha(k,n_t\text{-}k)$ es el punto crítico superior al $100\alpha\%$ de la distribución F con k y $n_t - k$ como grados de libertad. La condición de fallo será cuando $T^2_{X_{S_i}} > T^2_\alpha$. El monitoreo con el estadístico T^2 sólo detecta cambios en las direcciones de los primeros k componentes. La variación en el espacio residual, formado por los componentes de $k+1$ a p se pueden monitorear con el estadístico Q (o SPE). Llamese V_r a la matriz $V_{[k+1,p]}$, entonces se obtiene $G = V_r V_r^T$. Esta matriz permite calcular el estadístico Q como $Q_{X_{S_i}} = X_{S_i} G X_{S_i}^T$.

El umbral que indicará condición de falla se calcula con

$$Q_\alpha = \theta_1 \left[\frac{h_o C_\alpha \sqrt{2\theta_2}}{\theta_1} + 1 + \frac{\theta_2 h_0 (h_0 - 1)}{\theta_1^2} \right]^{\frac{1}{h_0}} \tag{4}$$

donde $\theta_i = \sum_{k+1}^{p} (\lambda_j)^i$, $h_o = 1 - \frac{2\theta_1\theta_3}{3\theta_2^2}$, C_α es la desviación normal correspondiente al percentil $(1 - \alpha)$, con α nivel de confianza. Al igual que en el estadístico T^2, si $Q_{X_{S_i}} > Q_\alpha$ se indica un evento de falla.

Aunque T^2 y Q son utilizados para monitorear los procesos, cada uno tiene una tarea específica de clasificación en un proceso [13]. T^2 mide la distancia al origen en el subespacio de los componentes principales. Éste contiene las variaciones normales de gran varianza del proceso que son comúnmente las señales, mientras el subespacio residual contiene principalmente ruido. El estadístico Q se encarga de medir la variabilidad que rompe la correlación normal del proceso, situación generada al haber un evento anormal. La región de comportamiento normal es más grande para T^2 que para Q, por esto las fallas con magnitudes de pequeñas a moderadas se pueden monitorear con el estadístico Q, mientras las fallas de gran magnitud excederán el umbral del estadístico T^2.

4 Diagnóstico de Fallas

El algoritmo *DPCA* por si solo, no realiza diagnóstico de fallas. Para realizar esto, se propone la generación de un residuo con los componentes residuales al

ser este subespacio el que cuenta con mayor sensibilidad ante fallas. El residuo generado en el subespacio residual [14] es:

$$R_{Q_r} = X_{S_t} - X_{S_t} Q_r Q_r^T \tag{5}$$

Las tablas de contribución residual [15], son usadas para monitorear fallas en las variables presentes en la ecuación (1), ya que cuantifican la contribución de cada variable del proceso al evento en fallo. Aquellas variables que muestren una alta contribución al espacio residual son aisladas como las causantes de la falla.

$$Cont_i = \frac{R_{Q_r i}^{\ 2}}{\sum_{j=1}^{n_t} R_{Q_r j}^{\ 2}} \tag{6}$$

5 Sistema Experimental

La industria química y petroquímica, alimentaria, etc utiliza ampliamente los Intercambiadores de Calor (*IC*). El objetivo es transferir calor de un fluido a otro, los cuales están separados por una barrera sólida. El *IC* utilizado es equipo industrial compacto de tubos y coraza para calentar agua utilizando vapor. Este equipo cuenta con 11 horquillas de tubo Cu-Ni , 3/4 plg de diámetro externo BWG-20 con arreglo triangular para calentar 10 *gpm* de agua, elevando la temperatura de $25°C$ a $70°C$ con vapor de 5 kg/cm^2. La presión del vapor es de $5-6$ kg/plg^2, con una temperatura de $140 - 150°C$. Además cuenta con un sistema de trampeo y un sistema de separación de humedad y rompedor de vacío para línea de vapor, Figura 1 a). Integrado al cuerpo del intercambiador se encuentra la instrumentación que permite su operación, Figura 1 b). Un *FieldPoint* de *National Instruments* se utiliza para monitorear las señales. La interfase de operación esta implementada en *LabView*, desde donde se puede operar en forma manual con un tiempo de muestreo deseado.

El sistema cuenta con dos transmisores de flujo, para el vapor y el agua a la entrada, se monitorean también las temperaturas del agua a la entrada y a la salida del *IC*, Figura 1. Como actuadores, se tienen dos válvulas de control para el vapor y el agua de entrada. Todas las señales se activan desde $4 - 20mA$ (0-100 % en recta de calibración). Para el estudio realizado con *DPCA* se ha monitoreado al siguiente vector de medición $\mathcal{X}(t)$=$[TT_{2_t}\ FT_{1_t}\ FT_{2_t}\ TT_{1_t}]$ con un retraso, $w = 1$ segundo. El *IC* fué operado en lazo abierto, con una temperatura de entrada del agua de $23°C$, 38% de apertura en la válvula de control del agua, 70% en la válvula de control de vapor con una temperatura de salida del agua de $32°C$, en promedio. El sistema se muestreo a un segundo. De los datos almacenados, el 70% fué tomado para entrenamiento mientras el restante fue usado para la identificación y validación de las fallas.

Se graficaron los valores propios de la matriz de covarianza R, obteniendo el gráfico *SCREE* que se observa en la Figura 2a. Se retendrán 4 componentes principales. La varianza total del conjunto de datos es la sumatoria de los valores propios, siendo generalmente de valor p. Tomando los primeros cuatro componentes T_4=$\sum_{j=1}^{4}\lambda_j$= $3.54+2.2+1.31+0.8 = 7.85$, y siendo $T_8 = 8$, se mantiene un 98.13% de la variabilidad total del conjunto original.

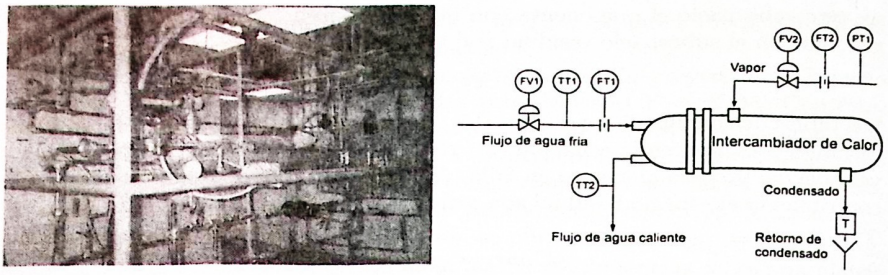


Fig. 1. En la figura izquierda se muestra una foto del Intercambiador de Calor (IC) Industrial. A su derecha, esta el diagrama de instrumentación del IC.En éste, FT_1 es el transmisor de flujo de agua de entrada, FT_2 es el de flujo de vapor, TT_1 y TT_2 son los de temperatura de entrada y salida del agua. FV_1 y FV_2 son las válvulas de control de agua y vapor de entrada.

6 Resultados

Se simularon tres tipos de fallas para probar al algoritmo $DPCA$. La primer falla fue de tipo abrupta sobre una magnitud simulando el sesgo en un instrumento electrónico. La segunda falla, también de tipo abrupta, fué de magnitud cero para emular la desconexión del sensor. La última fué una falla donde el sensor suspende su funcionamiento en el valor medio de caracterización. Las tres fallas se presentan para $t > 240$ segundos, pudiéndose apreciar en la Figura 2b. Las magnitudes para los diferentes tipos de falla en los transmisores, se encuentran en la Tabla 1.

Table 1. Parámetros estadísticos de las mediciones

Transmisor	Magnitud Media	Desviación Estandard	Varianza	Magnitud Sesgo
FT_1	64.23%	1.26	1.58	9%
FT_2	32.17%	1.00	1.00	8%
TT_1	$22.72°C$	0.03	0.00	$0.4°C$
TT_2	$31.86°C$	0.23	0.05	$2°C$

Para el estadístico T^2 se utilizo n_t=2896 datos y k=4 componentes principales, dejando los 4 restantes para el cálculo del umbral del subespacio Q. En ambos el nivel de confianza se encuentra en α=0.95, resultando las magnitudes de 9.51 y 0.066 para los umbrales T^2_α y Q_α, respectívamente.

Para el análisis, se utilizó al transmisor de flujo de vapor FT_2. Como se observa en las Figuras 3a y 3b, se detectaron las fallas de tipo sesgo y desconexión

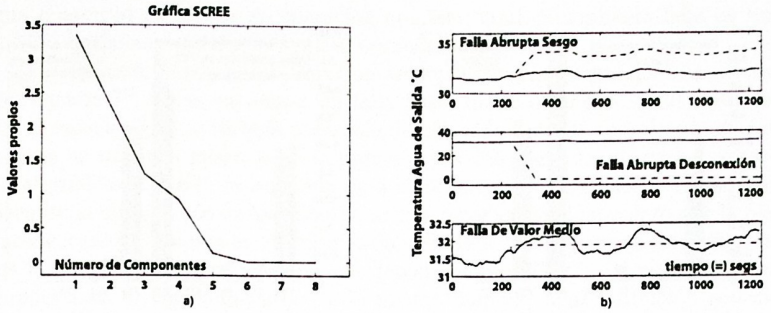


Fig. 2. La figura izquierda muestra la gráfica $SCREE$ para la matriz de covarianza R en el IC. En la derecha, se despliegan el tipo de fallas implementadas.

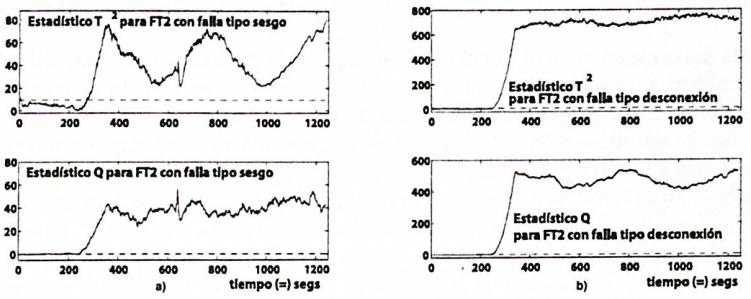


Fig. 3. La figura izquierda muestra el estadístico T^2 y Q para fallas en FT_2 de tipo sesgo, mientras que a la derecha se encuentran para la falla de tipo desconexión.

en el sensor del flujo de vapor con ambos estadísticos. En el caso de la falla de tipo sesgo, Figura 3a, el estadístico T^2 se ve afectado por la variabilidad de los componentes principales, presentando oscilaciones una vez que se dispara de su valor nominal, siendo estas de magnitudes considerables. Esta característica no se presenta en el espacio Q, pues cuenta con las componentes de menor variabilidad. Por esto, se sugiere el uso del estadístico Q para el monitoreo de sesgos, con el fin de evitar falsas alarmas.

Al introducir la falla que emulaba la desconexión, Figura 3b, los estadísticos T^2 y Q presentaron un aumento considerable en la magnitud de las proyecciones generadas. Si se considerase el implementar un filtro para suavizar el cambio del residuo, se sugiere el uso del estadístico T^2, ya que las fallas de tipo desconexión presentan menor oscilación cuando el residuo se encuentra ya estable.

La Figura 4a presenta la contribución de cada variable ante las fallas previamente simuladas. Al ser el espacio residual más sensible a las fallas, se produce

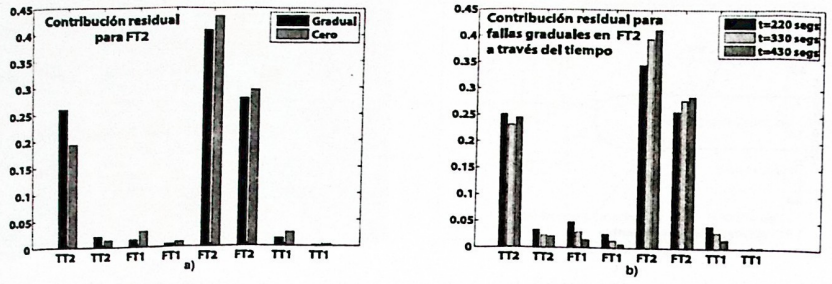


Fig. 4. En la figura izquierda se encuentra la tabla de contribución residual para fallas en FT_2 de tipo cero y gradual, a su derecha se presenta la evolución de la contribución en FT_2 a través del tiempo.

una maximización en el cálculo de la ecuación (6) para el elemento en falla. Esto se puede apreciar en la quinta y sexta columna que se asocian al residuo del elemento FT_2, el transmisor del flujo de vapor de entrada. Aunque las magnitudes de las proyecciónes de la falla tipo sesgo en T^2 y Q eran considerablemente menores a las de tipo de desconexión, se puede apreciar que las contribuciones de ambas están muy apegadas. Esto es porque al tener un espacio de p variables, la sumatoria de contribuciones, desde i=1 hasta p, se acota a la unidad. Esto puede resultar en tablas de contribución residual que tengan un aporte muy parecido, impidiendo la estimación de la magnitud de la falla por un método gráfico.

En la Figura 4a, se obtuvo la contribución residual una vez que se termino la simulación. En un proceso en línea se sugiere monitorear la contribución residual en periodos establecidos, para localizar al elemento en falla. Se monitoreo el cálculo del residuo en tres tiempos: 20 segundos antes de la falla, y a los 90 y 190 segundos después de la falla.

En la Figura 4b, se puede apreciar la evolución del residuo para los tres casos mencionados. Antes de la falla, los residuos predominantes son los generados por el sensor de temperatura de salida del agua y el transmisor de flujo de vapor de entrada, debido al factor de carga de los componentes residuales. Se observa que 90 segundos después de la falla, el residuo generado por la falla en el sensor de flujo vapor aumenta, quitándole contribución al resto de las variables, especialmente al transmisor de temperatura de la salida. Pasados los 190 segundos, el residuo generado por el transmisor de flujo de vapor se estabiliza en su valor final. Al tener un proceso en condición nominal y utilizar los datos para el entrenamiento de *DPCA*, se sugiere la creación de una plantilla de contribución residual. Puesto que estará realizada con residuos de rango nominal, permitirá comparar la evolución al presentarse cualquier falla, ya sea un sesgo o de desconexión, indicando el sitio donde ocurrió. Además de las fallas de sesgo y desconexión, se emularon disfunciones donde el sensor queda en desperfecto con

una magnitud dentro de su operación nominal, aquí denominada falla de tipo medio. La falla se simulo en $t = 240$ segundos.

La Figura 5 muestra una detección ambigua con ambos estadísticos. Dentro del espacio T^2, no se encuentra un falla hasta despues de $t = 1,000$ segundos. En el espacio Q, se aprecia la presencia de una falla durante toda la simulación, incluso se tuvieron falsas alarmas previo a $t = 240$ segundos. Como se apreció en el gráfico $SCREE$, la selección de 4 componentes principales y 4 residuales permite la observación de los fallas en ambos espacios en el momento que la falla sucede, como se observa en las Figuras 3a y 3b. Este hecho permite confirmar que las fallas de tipo valor medio no son detectadas por $DPCA$, al estar de forma implícita en el entrenamiento. De la misma manera, la contribución residual arrojo resultados no óptimos al indicar falla en el sensor de temperatura del agua de entrada TT_1 cuando se simularon fallas de tipo valor medio en TT_1, TT_2, FT_1 y FT_2.

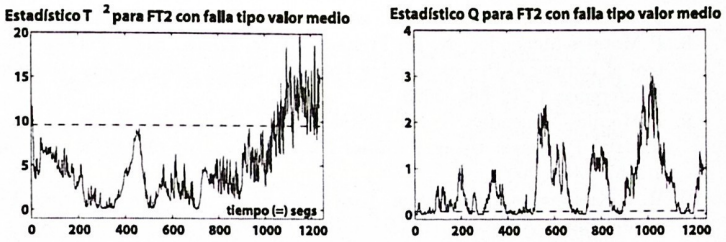


Fig. 5. Estadístico T^2 y Q para la falla tipo valor medio en FT_2.

7 Conclusiones

Se implementó el algoritmo $DPCA$ para detección de fallas en los sensores de un IC industrial. A partir de un espacio multivariable formado por cuatro sensores, se extrajeron los componentes principales y residuales. Se monitoreo la operación en modo nominal, por medio de los estadísticos T^2 y Q, definiéndose como referencia. Se detectaron las fallas, al sobrepasar los umbrales T^2_α y Q_α, con fallas que emulaban sesgos y desconexión en los sensores. Aprovechando la sensibilidad del espacio residual, se generaron tablas de contribución residual que permitieron identificar el sensor de falla, con lo que se dio la capacidad de diagnóstico al algorítmo $DPCA$. Se pudieron diagnosticar fallas que mantenían el valor medio de la señal, imposibles de detectar/diagnosticar via $DPCA$ estándar. Se considera, a futuro, el desarrollo de una interfase, con la que se logrará obtener el modelo de referencia para detectar/diagnosticar fallas en línea e integrar un control tolerante a fallas.

References

1. S. J Bailey. From Desktop to Plant Floor, a CRT Is the Control Operators Window on the Process. *Control Eng.*, 31(6):86–90, 1984.
2. Venkat Venkatasubramanian, R Rengaswamy, K Yin, and S Kavuri. A Review of Process Fault Detection and Diagnosis. Part I. *Computers and Chemical Eng.*, (3):293–311.
3. J. Mina and C. Verde. Detección de Fallas Usando PCA. *Congreso Anual de la AMCA 2004*, 2004.
4. K.P. Detroja, R.D. Gudi, and S.C. Patwardhan. Plant-Wide Detection and Diagnosis Using CA. *Control Eng.*, 15(12):1468–1483, 2007.
5. R.H. Storer W.Ku and C. Georgakis. Disturbance Detection and Isolation by DPCA. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 30:179–196, 1995.
6. J. Liang Y.Liu and J. Qian. The Application of DPCA to Enhance Chunk Monitoring of an Industrial Fluidized-Bed Reactor. *Proc. of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2:1685–1688, 2004.
7. J. Mina and C. Verde. Fault Detection for Large Scale Systems Using DPCA. *Int. Journal of Computers, Comm. and Control*, 2(2):185–194, 2007.
8. R.Morales-Menendez, N. De Freitas, and D. Poole. State Estimation and Control of Industrial Processes using Particles Filters. *Proc. of the American Control Conference*, 1:579–584, 2003.
9. R.Morales-Menendez, N. De Freitas, and D. Poole. Real-Time Monitoring of Industrial Processes Using Particles Filters. *Proc. of the NIPS, The MIT Press*, 1:1457–1464, 2002.
10. R.A. Krishnan and N. Pappa. Real Time Fault Diagnosis for a Heat Exchange-A Model Based Approach. *IINDICON, 2005 Annual IEEE*, 11(13):78–82, 2005.
11. S. Kumar, E.B. Martin, and J. .Morris. Detection of Process Model Changes in PCA Based Performance Monitoring. *Proc. of the American Control Conference*, 4:2719–2724, 2002.
12. R.B. Cattell. The SCREE Test for the Number of Factors. *Multivariate Behavioral Research*, 1:245–276, 1966.
13. S.J. Qin. Statistical Process Monitoring: Basics and Beyond. *Journal of Chemometrics*, 17:480–502, 2003.
14. R Isermann. *Fault Diagnosis Systems.* Springer, Landgraf-Georg-Strasse 4 64283 Darmstadt Germany, 1 edition, 2005.
15. P. Miller, R. Swanson, and C. Heckler. Contribution Plots: A Missing Link in Multivariate Quality Control. *Appl. Math. and Comp.*, 8(4):775–792, 1998.

Análisis estructural del motor de inducción de rotor devanado para diagnóstico de fallas eléctricas

Juan A. Mejía, Nancy Visairo, and Ricardo Álvarez *

Centro de Investigación y Estudios de Posgrado, Facultad de Ingenieria, UASLP,
Dr. Manuel Nava 8, 78290, San Luis Potosí, S.L.P.
Teléfono-fax: (52)444-817-3381
jamejiav@gmail.com,{nvisairoc,ralvarez}@uaslp.mx

Resumen El objetivo de este artículo es mostrar la detectabilidad y aislabilidad del motor de inducción de rotor devanado a través del análisis estructural para un conjunto de fallas. El modelo estructural se determina a partir del modelo matemático del motor en condiciones normales utilizando el marco de referencia ABC. En este trabajo sólo se consideran fallas eléctricas. El modelo estructural del motor consta de 25 restricciones, 14 variables conocidas, 16 variables desconocidas y 3 perturbaciones. Con la descomposición canónica de *Dulmage-Mendelsohn* se muestra que el modelo del motor es sobre-restringido lo cual permite generar relaciones redundantes. Se genera la matriz de incidencia para obtener los *aparejamientos (matchings)* que muestran si es posible calcular variables desconocidas a través de las variables conocidas. De esta forma, se obtiene la máxima *aislabilidad* entre las fallas consideradas.

Key words: Análisis estructural (AE), motor de inducción, diagnóstico de fallas.

1. Introducción

Aunque inicialmente en las máquinas eléctricas existieron sistemas de protección para sobrecorrientes, sobrevoltajes, fallas a tierra, etc. para asegurar una operación fiable, el monitoreo y diagnóstico han tenido gran interés en los últimos 20 años, [7]. En particular, las máquinas de inducción son las más empleadas en la industria moderna por su bajo costo, robustez, bajo mantenimiento y su relación peso-potencia. Sin embargo, son susceptibles a fallas (eléctricas, en baleros y excentricidad), las cuales pueden sacarlas de operación y generar costos elevados en mantenimientos de emergencia y como consecuencia, bajo rendimiento económico [12].

* Los autores agradecen a los proyectos P/CA-78-SEP y C07-FAI-11-26.62 que financiaron esta investigación.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Sciencie 36, 2008, pp. 13-22

Es así como la industria se ha interesado en adoptar técnicas de monitoreo y diagnóstico para evaluar las condiciones de operación de las máquinas de inducción. Estas técnicas permiten, entre otras cosas, incrementar considerablemente la confiabilidad y proporcionar seguridad a los usuarios satisfaciendo los nuevos requerimientos en los complejos industriales [3].

Para esto, diversas técnicas de diagnóstico de fallas para máquinas de inducción se han desarrollado. Entre las más frecuentes están: las basadas en el espectro en frecuencia en las que el diagnóstico consiste en un monitoreo en línea y un procesamiento de las corrientes del estator para detectar los espectros típicos en frecuencia [6]; las basadas en el fasor instantáneo de Park, esta técnica consiste en realizar una transformación a dos ejes en cuadratura y, extrayendo información del fasor espacial resultante se consigue el diagnóstico para diversos tipos de fallas considerando una falla a la vez [5], [10]; están también las técnicas basadas en modelos matemáticos, en estas técnicas se utiliza la identificación de parámetros u observadores de la teoría de Control Automático, [2]. Cada una de las técnicas existentes son válidas considerando la importancia de la máquina, la cantidad de las fallas a detectar y el mantenimiento al que se ve sometida cada máquina; sin embargo, hasta ahora no se ha presentado un análisis que muestre las propiedades de la máquina relacionadas con el diagnóstico de fallas, es decir, un análisis que permita determinar la detectabilidad y aislabilidad para el conjunto de fallas de interés.

Lo anterior motivó el desarrollo de este trabajo en el cual, por medio de la teoría de Análisis Estructural, se determinan las propiedades estructurales de la máquina de inducción para propósitos de diagnóstico de fallas eléctricas, en particular, se considera el motor de inducción de rotor devanado. Este análisis permite entonces determinar características importantes tales como robustez a perturbaciones, detectabilidad y aislabilidad del conjunto de fallas de interés.

Así, este artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se dan los conceptos fundamentales del Análisis Estructural mostrando la metodología seguida en este trabajo. En la Sección 3 se presenta el modelo matemático del motor de rotor devanado considerando el marco ABC. En la Sección 4 se desarrolla el análisis estructural aplicado al motor basado en su modelo estructural. La Sección 5 discute las propiedades estructurales del motor. Finalmente, en la Sección 6 se dan las conclusiones.

2. Análisis Estructural

En esta sección se dan los conceptos básicos para realizar el análisis estructural [1].

Considere un modelo general en espacio de estado

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), \theta(t), f(t), d(t)). \tag{1}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), \theta(t)). \tag{2}$$

$$0 = m(x(t), u(t)). \tag{3}$$

con los estados $x(t) \in \mathcal{R}^n$, entradas $u(t) \in \mathcal{R}^m$, fallas $f(t) \in \mathcal{R}^f$, perturbaciones $d(t) \in \mathcal{R}^d$, salidas $y(t) \in \mathcal{R}^p$, y parámetros $\theta(t) \in \mathcal{R}^q$ los cuales pueden ser considerados como variables con valores conocidos o desconocidos, y las funciones m restricciones estáticas. Entonces el conjunto de ecuaciones (1-3) están dadas respectivamente por:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{Y} \cup \theta \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{D} \qquad \mathcal{C} = g \cup h \cup m$$

donde $\mathcal{Z}$ es el conjunto de variables y parámetros, y $\mathcal{C}$ es el conjunto de las restricciones.

- El modelo del comportamiento del sistema se define por el par $(\mathcal{C},\mathcal{Z})$, que es independiente tanto de la forma de las restricciones como de las variables.
- El modelo estructural de un sistema $(\mathcal{C},\mathcal{Z})$ es un grafo bipartita $(\mathcal{C},\mathcal{Z},\varepsilon)$, donde

  $$\varepsilon \subset \mathcal{C} \times \mathcal{Z}. \tag{4}$$

  es el conjunto de aristas definidas por

  $$(c_i, z_j) \in \varepsilon. \tag{5}$$

  si la variable z_j aparece en la restricción c_i.

La matriz de incidencia (**MI**) de un grafo bipartita es una matriz booleana donde las filas corresponden a las restricciones y las columnas a las variables, los vertices se asocian con **1** cuando hay intersección entre una restricción y una variable, esto es:

$$MI = \{m_{i,j} \mid m_{i,j} = 1 \text{ si } (c_i, z_j) \in \varepsilon \text{ de lo contrario } m_{i,j} = 0\}. \tag{6}$$

Definition 1. *El subconjunto $M \subset \varepsilon$ es un aparejamiento que asigna elementos de $\mathcal{Z}$ con elementos de $\mathcal{C}$ si para cualquier pareja $e_1, e_2 \subset M$ tal que $e_1 \neq e_2$ implica*

$$p_c(e_1) \neq p_c(e_2) \;\; y \;\; p_z(e_1) \neq p_z(e_2). \tag{7}$$

donde

e_1, e_2 : *pueden ser aristas dirigidas: variable a restricción o restricción a variable.*
$p_c(e_z)$: *es una proyección de la arista sobre el conjunto de restricciones.*
$p_z(e_z)$: *es una proyección de la arista sobre el conjunto de variables.*

El proceso de aparejamiento es en esencia un camino para especificar en un sistema cuáles son las restricciones que son necesarias para encontrar una solución para una variable desconocida. Una forma de optimizar los aparejamientos se logra con la descomposición Dulmage-Mendelsohn, Figura 1.

Theorem 1. *Descomposición de una matriz de incidencia (MI).*
Cualquier MI de dimensión finita puede ser únicamente descompuesta en 3 secciones:

- Sobre-restringida: $S^+ = (\mathcal{C}^+, \mathcal{Z}^+)$ tal que $Q(\mathcal{C}^+) = \mathcal{Z}^+$, y existan parejas completas sobre $\mathcal{Z}^+$ pero no sobre $\mathcal{C}$, implicando una existencia de una redundancia de información.
- Justo-restringida: $S^0 = (\mathcal{C}^0, \mathcal{Z}^0)$ tal que $Q(\mathcal{C}^0) = \mathcal{Z}^0 \cup \mathcal{Z}^+$, y existan parejas completas sobre ambas $\mathcal{Z}^0$ y en $\mathcal{C}^0$.
- Sub-restringida: $S^- = (\mathcal{C}^-, \mathcal{Z}^-)$ tal que $Q(\mathcal{C}^-) = \mathcal{Z}^- \cup \mathcal{Z}^0 \cup \mathcal{Z}^+$, y existan parejas completas sobre $\mathcal{C}^-$ pero no sobre $\mathcal{Z}^-$.

donde $Q(\mathcal{C}^i)$ son las proyecciones respectivas, $i = +, -, 0$.

	Z^+	Z^0	Z^-
C^+		0	0
C^0			0
C^-			

Figura 1. Descomposición Dulmage-Mendelsohn

Para determinar la detectabilidad y la aislabilidad se utilizan las relaciones redundantes (ARR´s) que son ecuaciones basadas sólo en señales conocidas tales como las de actuadores o de sensores, y son siempre iguales a cero cuando no hay una falla presente y diferente de cero cuando cierto conjunto de fallas ocurre. El resultado de una ARR es también llamado señal de residuo [9], y se obtienen a partir de las restricciones que no son consideradas en el aparejamiento.

3. Modelo del Motor de Rotor devanado

Los motores de inducción de rotor devanado se construyen con espiras aisladas en el rotor similares a las de los devanados de estator. Los devanados de rotor son usualmente del tipo trifásico con tres conectores para aislar los anillos conductores (conocidos como anillos deslizantes) montados en la parte interna del eje del rotor y se usan cepillos de carbón para las conexiones externas.

Por lo general, estos motores están disponibles en rangos desde 5 HP hasta 15,000 HP, y son ideales para distintas aplicaciones tales como grúas, bombas, transportadoras, mezcladoras, etc. [11].

Este motor tiene la capacidad de aumentar la velocidad en equipos con gran inercia y cargas grandes de manera suave y fácil. El motor de rotor devanado puede incluso desarrollar un torque muy grande al arranque y mantenerse en

baja velocidad. Además, ofrece la posibilidad de un control completo de ambos lados de la máquina (rotor y estator) de una manera equivalente. Esto es una característica importante debido a que da una mayor libertad de operación como motor eléctrico. Debido a que el motor de rotor devanado es controlado por medio de inversores, uno para el rotor y otro para el estator (Figura 2), da la posibilidad de mediciones en estos dos componentes de la máquina, lo que no es posible en otros motores eléctricos como el motor de inducción jaula de ardilla [8].

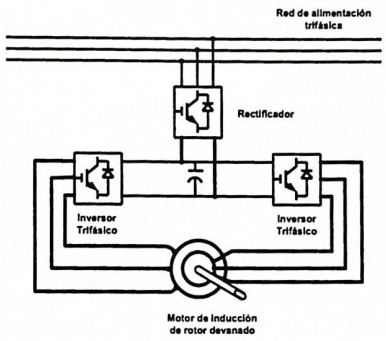


Figura 2. Motor de Inducción de rotor devanado alimentado por 2 inversores

Para obtener el modelo del motor de rotor devanado se toma el modelo del motor de inducción jaula de ardilla [4] asumiendo que el rotor se modela como un circuito trifásico. De esta forma, sólo es necesario considerar en el modelo que el voltaje del rotor devanado no es cero ya que posee terminales externas. Así, las ecuaciones del motor de rotor devanado están dadas por:

$$[V_S] = [R_S]\,[I_S] + \frac{d\,[\Psi_S]}{dt},\ [V_R] = [R_R]\,[I_R] + \frac{d\,[\Psi_R]}{dt}. \tag{8}$$

$$[\Psi_S] = [L_S]\,[I_S] + [M_{SR}(\theta_r)]\,[I_R],\ [\Psi_R] = [L_R]\,[I_R] + [M_{SR}(\theta_r)]^T\,[I_S]. \tag{9}$$

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m. \tag{10}$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{P}{2J}\,[I_S]^T\left[M_{SR}(\theta_r + \frac{\pi}{2})\right][I_R] - \frac{B}{J}\omega_m - \frac{1}{J}T_l. \tag{11}$$

P : Número de pares de polos
$R_S = diag[R_{sa}R_{sb}R_{sc}]$: Resistencia del estator por fase
L_{ls} : Inductancia de dispersión del estator
$R_R = diag[R_{ra}R_{rb}R_{rc}]$: Resistencia del rotor por fase
L_{lr} : Inductancia de dispersión del rotor
L_{ms} : Coeficiente de la inductancia mutua entre dos fases del estator
L_{mr} : Coeficiente de la inductancia mutua entre dos fases del rotor

M_{SR} :	Inductancia mutua máxima entre una fase del estator y una fase del rotor
$V_S = [V_{sa} V_{sb} V_{sc}]^T$:	Tensiones de alimentación de las fases del estator
$I_S = [I_{sa} I_{sb} I_{sc}]^T$:	Corrientes en las fases del estator
$\Psi_S = [\psi_{sa} \psi_{sb} \psi_{sc}]^T$:	Flujos en las fases del estator
$\Psi_R = [\psi_{ra} \psi_{rb} \psi_{rc}]^T$:	Flujos en las fases del rotor
$V_R = [V_{ra} V_{rb} V_{rc}]^T$:	Tensiones en las fases del rotor
$I_R = [I_{ra} I_{rb} I_{rc}]^T$:	Corrientes en las fases del rotor
θ_r :	Posición angular del rotor
θ_m :	Posición mecánica $\theta_r = \frac{P}{2}\theta_m$
ω_m :	Velocidad mecánica
T_{em} :	Par electromagnético
T_l :	Par de carga
B :	Coeficiente de fricción viscosa
J :	Momento de Inercia

4. Análisis Estructural del motor

El modelo dinámico del motor de rotor devanado contiene 25 restricciones c_i´s. Cuenta con 14 variables conocidas $\mathcal{X}_k$, 16 desconocidas $\mathcal{X}_x$, 3 perturbaciones $\mathcal{D}$ y 16 parámetros θ.

$$c_1 : f\left(\theta_m, I_{sa}, I_{ra}, I_{rb}, I_{rc}, \dot{I}_{sa}, \dot{I}_{sb}, \dot{I}_{sc}, \dot{I}_{ra}, \dot{I}_{rb}, \dot{I}_{rc}, \dot{\theta}_m, V_{sa}\right). \tag{12}$$

$$c_2 : f\left(\theta_m, I_{sb}, I_{ra}, I_{rb}, I_{rc}, \dot{I}_{sa}, \dot{I}_{sb}, \dot{I}_{sc}, \dot{I}_{ra}, \dot{I}_{rb}, \dot{I}_{rc}, \dot{\theta}_m, V_{sb}\right). \tag{13}$$

$$c_3 : f\left(\theta_m, I_{sc}, I_{ra}, I_{rb}, I_{rc}, \dot{I}_{sa}, \dot{I}_{sb}, \dot{I}_{sc}, \dot{I}_{ra}, \dot{I}_{rb}, \dot{I}_{rc}, \dot{\theta}_m, V_{sc}\right). \tag{14}$$

$$c_4 : f\left(\theta_m, I_{ra}, I_{sa}, I_{sb}, I_{sc}, \dot{I}_{sa}, \dot{I}_{sb}, \dot{I}_{sc}, \dot{I}_{ra}, \dot{I}_{rb}, \dot{I}_{rc}, \dot{\theta}_m, V_{ra}\right). \tag{15}$$

$$c_5 : f\left(\theta_m, I_{rb}, I_{sa}, I_{sb}, I_{sc}, \dot{I}_{sa}, \dot{I}_{sb}, \dot{I}_{sc}, \dot{I}_{ra}, \dot{I}_{rb}, \dot{I}_{rc}, \dot{\theta}_m, V_{rb}\right). \tag{16}$$

$$c_6 : f\left(\theta_m, I_{rc}, I_{sa}, I_{sb}, I_{sc}, \dot{I}_{sa}, \dot{I}_{sb}, \dot{I}_{sc}, \dot{I}_{ra}, \dot{I}_{rb}, \dot{I}_{rc}, \dot{\theta}_m, V_{rc}\right). \tag{17}$$

$$c_7 : f\left(\dot{\theta}_m, \omega_m\right). \tag{18}$$

$$c_8 : f\left(\dot{\omega}_m, \omega_m, \theta_m, J, B, T_l, I_{ra}, I_{rb}, I_{rc}, I_{sa}, I_{sb}, I_{sc}\right). \tag{19}$$

$$c_{17} : f\left(I_{sa}, I_{sb}, I_{sc}\right). \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
c_9 &: \dot{I}_{sa} = \tfrac{dI_{sa}}{dt} = f(I_{sa}, \dot{I}_{sa}) \\
c_{10} &: \dot{I}_{sb} = \tfrac{dI_{sb}}{dt} = f(I_{sb}, \dot{I}_{sb}) \\
c_{11} &: \dot{I}_{sc} = \tfrac{dI_{sc}}{dt} = f(I_{sc}, \dot{I}_{sc}) \\
c_{12} &: \dot{I}_{ra} = \tfrac{dI_{ra}}{dt} = f(I_{ra}, \dot{I}_{ra}) \\
c_{13} &: \dot{I}_{rb} = \tfrac{dI_{rb}}{dt} = f(I_{rb}, \dot{I}_{rb}) \\
c_{14} &: \dot{I}_{rc} = \tfrac{dI_{rc}}{dt} = f(I_{rc}, \dot{I}_{rc}) \\
c_{15} &: \dot{\theta}_m = \tfrac{d\theta_m}{dt} = f(\theta_m, \dot{\theta}_m) \\
c_{16} &: \dot{\omega}_m = \tfrac{d\omega_m}{dt} f(\omega_m, \dot{\omega}_m).
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
c_{18} &: YI_{sa} = I_{sa} = f(I_{sa}, YI_{sa}) \\
c_{19} &: YI_{sb} = I_{sb} = f(I_{sb}, YI_{sb}) \\
c_{20} &: YI_{sc} = I_{sc} = f(I_{sc}, YI_{sc}) \\
c_{21} &: Y\theta_m = \theta_m = f(\theta_m, Y\theta_m) \\
c_{22} &: Y\omega_m = \omega_m = f(\omega_m, Y\omega_m) \\
c_{23} &: YI_{ra} = I_{ra} = f(I_{ra}, YI_{ra}) \\
c_{24} &: YI_{rb} = I_{rb} = f(I_{rb}, YI_{rb}) \\
c_{25} &: YI_{rc} = I_{rc} = f(I_{rc}, YI_{rc}).
\end{aligned} \tag{22}$$

La representación estructural de una restricción no especifica la manera en que interactúan las variables y se incluyen las restricciones diferenciales (21) c_9-c_{16} para hacer diferencia estructural entre las variables de estado y sus derivadas, y (22) $c_{18} - c_{25}$, para referir a las señales de sensor. Estos sensores podrían ser omitidos mediante la adición de más restricciones, pero se incluyen ya que en este modelo es posible, además de que proporcionan mayor redundancia.

4.1. Matriz de incidencia

El modelo estructural del motor se puede expresar por medio de su matriz de incidencia. La tabla 1 muestra esta representación en función de variables desconocidas.

Cuadro 1. Matriz de incidencia

	Desconocidas																	
↗	I_{ra}	I_{rb}	I_{rc}	I_{sa}	I_{sb}	I_{sc}	θ_m	ω_m	I_{sa}	I_{sb}	I_{sc}	I_{ra}	I_{rb}	I_{rc}	θ_m	ω_m	Perturbaciones	Conocidas
c_1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0		V_{sa}
c_2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0		V_{sb}
c_3	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0		V_{sc}
c_4	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0		V_{ra}
c_5	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0		V_{rb}
c_6	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0		V_{rc}
c_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
c_8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	T_l,B,J	
c_9	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
c_{10}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
c_{11}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
c_{12}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
c_{13}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
c_{14}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		
c_{15}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0		
c_{16}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1		
c_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0		
c_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		YI_{sa}
c_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		YI_{sb}
c_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		YI_{sc}
c_{21}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$Y\theta_m$
c_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$Y\omega_m$
c_{23}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		YI_{ra}
c_{24}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		YI_{rb}
c_{25}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		YI_{rc}

4.2. Generación de las Relaciones Redundantes (ARR´s)

Para el proceso aparejamiento y generación de las ARR´s se realizó la descomposición Dulmage-Mendelsohn, la cual arroja sólo un sistema sobre-restringido, como se muestra en la tabla 2. Los aparejamientos se denotan por $\bigotimes$. Observando la tabla 2 se puede obtener el conjunto de restricciones redundantes: $C_{red} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_{17}\}$.

$$c_1 : (V_{sa}, c_{15}(c_{21}(Y\theta_m)), c_{18}(YI_{sa}), c_9(c_{18}(YI_{sa})), c_{10}(c_{19}(YI_{sb})), c_{11}(c_{20}(YI_{sc})), c_{21}(Y\theta_m), c_{23}(YI_{ra}), c_{24}(YI_{rb}), c_{25}(YI_{rc}), c_{12}(c_{23}(YI_{ra})), c_{13}(c_{24}(YI_{rb})), c_{14}(c_{25}(YI_{rc}))) = 0. \quad (23)$$

$$c_2 : (V_{sb}, c_{15}(c_{21}(Y\theta_m)), c_9(c_{18}(YI_{sa})), c_{19}(YI_{sb}), c_{10}(c_{19}(YI_{sb})), c_{11}(c_{20}(YI_{sc})), c_{21}(Y\theta_m), c_{23}(YI_{ra}), c_{24}(YI_{rb}), c_{25}(YI_{rc}), c_{12}(c_{23}(YI_{ra})), c_{13}(c_{24}(YI_{rb})), c_{14}(c_{25}(YI_{rc}))) = 0. \quad (24)$$

$$c_3 : (V_{sc}, c_{15}(c_{21}(Y\theta_m)), c_9(c_{18}(YI_{sa})), c_{10}(c_{19}(YI_{sb})), c_{20}(YI_{sc}), c_{11}(c_{20}(YI_{sc})), c_{21}(Y\theta_m), c_{23}(YI_{ra}), c_{24}(YI_{rb}), c_{25}(YI_{rc}), c_{12}(c_{23}(YI_{ra})), c_{13}(c_{24}(YI_{rb})), c_{14}(c_{25}(YI_{rc}))) = 0. \quad (25)$$

$$c_4 : (V_{ra}, c_{15}(c_{21}(Y\theta_m)), c_{18}(YI_{sa}), c_9(c_{18}(YI_{sa})), c_{19}(YI_{sb}), c_{10}(c_{19}(YI_{sb})), c_{20}(YI_{sc}), c_{11}(c_{20}(YI_{sc})), c_{21}(Y\theta_m), c_{23}(YI_{ra}), c_{12}(c_{23}(YI_{ra})), c_{13}(c_{24}(YI_{rb})), c_{14}(c_{25}(YI_{rc}))) = 0. \quad (26)$$

$$c_5 : (V_{rb}, c_{15}(c_{21}(Y\theta_m)), c_{18}(YI_{sa}), c_9(c_{18}(YI_{sa})), c_{19}(YI_{sb}), c_{10}(c_{19}(YI_{sb})), c_{20}(YI_{sc}), c_{11}(c_{20}(YI_{sc})), c_{21}(Y\theta_m), c_{24}(YI_{rb}), c_{12}(c_{23}(YI_{ra})), c_{13}(c_{24}(YI_{rb})), c_{14}(c_{25}(YI_{rc}))) = 0. \quad (27)$$

Cuadro 2. Matriz de incidencia. Aparejamiento

		Desconocidas																	
	↗	I_{ra}	I_{rb}	I_{rc}	I_{sa}	I_{sb}	I_{sc}	θ_m	ω_m	I_{sa}	I_{sb}	I_{sc}	I_{ra}	I_{rb}	I_{rc}	θ_m	ω_m	Perturbaciones	Conocidas
	c_{12}	⊗	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
	c_{13}	0	⊗	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
	c_{14}	0	0	⊗	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		
	c_9	0	0	0	⊗	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
	c_{10}	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
	c_{11}	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
	c_{15}	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0	0	0	0	1	0		
	c_{16}	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0	0	0	0	1		
	c_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0	0	0	0		YI_{sa}
	c_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0	0	0		YI_{sb}
	c_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0	0		YI_{sc}
	c_{23}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0		YI_{ra}
	c_{24}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0		YI_{rb}
	c_{25}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0		YI_{rc}
	c_{21}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0		$Y\theta_m$
	c_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⊗		$Y\omega_m$
KVL's	1	c_1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0		V_{ra}
	2	c_2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0		V_{rb}
	3	c_3	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0		V_{rc}
	4	c_4	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0		V_{ra}
	5	c_5	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0		V_{rb}
	6	c_6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0		V_{rc}
	7	c_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1		
	8	c_8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	T,B,J	
	9	c_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0		

$$c_6 : (V_{rc}, c_{15}(c_{21}(Y\theta_m)), c_{18}(YI_{sa}), c_9(c_{18}(YI_{sa})), c_{19}(YI_{sb}), c_{10}(c_{19}(YI_{sb})), c_{20}(YI_{sc}), c_{11}(c_{20}(YI_{sc})), c_{21}(Y\theta_m), c_{25}(YI_{rc}), c_{12}(c_{23}(YI_{ra})), c_{13}(c_{24}(YI_{rb})), c_{14}(c_{25}(YI_{rc}))) = 0. \quad (28)$$

$$c_7 : (c_{15}(c_{21}(Y\theta_m)), c_{22}(Y\omega_m)) = 0. \quad (29)$$

$$c_8 : (T_l, B, J, c_{23}(YI_{ra}), c_{24}(YI_{rb}), c_{25}(YI_{rc}), c_{18}(YI_{sa}), c_{19}(YI_{sb}), c_{20}(YI_{sc}), c_{21}(Y\theta_m), c_{22}(Y\omega_m), c_{16}(c_{22}(Y\omega_m))) = 0. \quad (30)$$

$$c_{17} : (c_{18}(YI_{sa}), c_{19}(YI_{sb}), c_{20}(YI_{sc})) = 0. \quad (31)$$

5. Análisis de aislabilidad del conjunto de fallas

En esta parte del análisis es necesario especificar los grupos de fallas que se pretenden detectar, y en qué restricciones se presentan.
Las fallas consideradas son:

- f_1 : Cuando existe un corto circuito entre espiras de la fase A de estator son afectados los parámetros (L_{lsa}, L_{ms} y R_{sa})
- f_2 : Cuando existe un corto circuito entre espiras de la fase B de estator son afectados los parámetros (L_{lsb}, L_{ms} y R_{sb})
- f_3 : Cuando existe un corto circuito entre espiras de la fase C de estator son afectados los parámetros (L_{lsc}, L_{ms} y R_{sc})
- f_4 : Cuando existe un corto circuito entre espiras de la fase A de rotor son afectados los parámetros (L_{lra}, L_{mr} y R_{ra})
- f_5 : Cuando existe un corto circuito entre espiras de la fase B de rotor son afectados los parámetros (L_{lrb}, L_{mr} y R_{rb})

- f_6 : Cuando existe un corto circuito entre espiras de la fase C de rotor son afectados los parámetros (L_{lrc}, L_{mr} y R_{rc})

5.1. Matriz de sensibilidad

Se puede observar que todas las fallas aparecen en las ARR´s y de esta forma es fácil detectarlas. Cabe destacar que se toman como entradas desconocidas o perturbaciones a T_l, B, J pues están sujetas a cambios debido a la carga mecánica, por lo tanto, en el análisis de sensibilidad no es incluida la ARR8 ya que es afectada por las perturbaciones.

El análisis de aislabilidad se hace posible cuando se conjuntan todas las ARR´s con su respectiva sensibilidad a las fallas. Ya que una ARR puede ser sensible a diferentes fallas, combinaciones de ARR´s pueden dar información de aislabilidad.

Cuadro 3. Matriz de sensibilidad

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
ARR1	1	1	1	0	0	0
ARR2	1	1	1	0	0	0
ARR3	1	1	1	0	0	0
ARR4	0	0	0	1	1	1
ARR5	0	0	0	1	1	1
ARR6	0	0	0	1	1	1
ARR7	0	0	0	0	0	0
ARR9	0	0	0	0	0	0

Observando la matriz de sensibilidad resultante, tabla 3, se muestra que la aislabilidad sólo es posible entre rotor y estator, pero no entre fases.

Ya que L_{ms} y L_{mr} son parámetros que, ante una falla, varían en una proporción mucho más pequeña que R_S y R_R, respectivamente, se pueden no tomar en cuenta para poder aislar completamente las 6 fallas.

Se puede observar en la tabla 3 que las ARR´s 7 y 9 no son sensibles a ninguna falla considerada, sin embargo, al considerar otro tipo de fallas, estas ARR´s podrían ser de gran utilidad para la detección y aislamiento.

6. Conclusiones

En este trabajo se presentó un análisis para el diagnóstico de fallas del motor de rotor devanado por medio del análisis estructural, la descomposición Dulmage-Mendelsonh encontró un sistema sobre-restringido en el cual se implementó uno de los posibles aparejamientos para el sistema. A partir de las

ecuaciones redundantes se encontraron las ARR´s, las cuales muestran que varias de ellas tienen las mismas firmas de falla logrando sólo aislabilidad entre rotor y estator.

La generación de los residuos se puede hacer fácilmente a partir de las ARR´s, lo cual demuestra que el análisis estructural es una herramienta muy útil para el diagnóstico de fallas.

Referencias

1. M. Blanke and M. Kinnaert and J. Lunze and M. Staroswiecki: Diagnosis and Fault-Tolerant Control, Springer, Berlin (2003).
2. Claudio Bonivento and Alberto Isidori and Lorenzo Marconi and Andrea Paoli: Implicit fault-tolerant control, application to induction motors, Automatica, (40), pp. 355-371,(2004).
3. V. Devanneaux and H. Kabbaj and B. Dagues and J. Faucher: A versatil model of squirrel cage induction machines for design, monitoring ans diagnosis purposes, European Power Electronics and Drives, pp. 1-11, (2001).
4. Krause P.C., Wasynczuk O., and Sudhoff S.D., Analsys of Electric Machinery and Drive Systems: IEEE Press & Wiley Interscience 2nd Edition, (2002).
5. Dalgerti Lelis-Milanez and Alexander Eigeles-Emanuel: The instantaneous-space-phasor a powerful diagnosis tool, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 52(1), pp. 143-147, (2003).
6. J. Milimonfared and H. Meshgin and S. Nandi and A. Der Minassians and H. Toliyat: A novel approach for broken-rotor-bar detection in cage induction motors, IEEE Transactions on Industry Applications, (34), pp. 1000-1006, (1999).
7. S. Nandi and H. Toliyat and X. Li: Condition monitoring and fault diagnosis of electrical motor. A review, IEEE Transactions on Energy Conversion, (20), pp. 719-729, (2005).
8. Gautam Poddar and V. T. Ranganathan, Senior Member, IEEE: Sensorless Field-Oriented Control for Double-Inverter-Fed Wound-Rotor Induction Motor Drive: IEEE Transactions on Industrial Electronics, 51(5), pp. 1089-1096, (2004).
9. Linda Rattfalt: A comparative study of two structural methods for fault isolability analysis, Master´s Thesis: Department of Electrical Egineering at Linkopings Universitet, Germany, (2004).
10. José Silva and A. J. Marques-Cardoso: Bearing failures diagnosis in three-phase induction motors by extended Park´s vector approach, 31st Annual Conference of IEEE, 6(10), pp. 2591-2595, (2005).
11. TECO-Westinghouse: Wound Rotor, TECO-Westinghouse, http://www.tecowestinghouse.com/PDF/woundrotor.pdf, (2008).
12. C. J. Verucchi and G. G. Acosta: Técnicas de detección y diagnóstico de fallos en máquinas eléctricas de inducción, IEEE Latin American Transactions, 5(1), pp. 41-49, (2007).

Análisis Estructural para la Generación de Residuos: Consideraciones para la Implementación

Marino Sánchez Parra[1], Cristina Verde[2], Dionisio A. Suárez Cerda[1]

[1]División de Sistemas de control, Instituto de Investigaciones Eléctricas
msanchez@iie.org.mx
[2]Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen. Se estudia la detectabilidad e identificabilidad de fallas críticas en un proceso complejo con requerimientos estrictos de operación y desempeño cuyo modelo dinámico es conocido. El caso de estudio es la turbina de gas de una central de generación de ciclo combinado. Se aplica el análisis estructural mediante tres algoritmos de aparejamiento diferentes, obteniéndose conjuntos de relaciones redundantes consistentes. El sistema es monitoreable, pero no completamente detectable ante fallas, por lo que se modifica la estructura del sistema para obtener uno completamente sobre-restringido. Se asegura la redundancia completa del sistema, basada en el análisis de combinaciones aparejables (bloques de König-Hall) entre restricciones y variables desconocidas, sin causalidad derivativa en el cálculo de los residuos.

Palabras clave: Análisis estructural, Diagnóstico de fallas, Matriz de incidencias, aparejamiento, redundancia, relaciones de redundancia analítica.

1 Introducción

Debido a la creciente complejidad de los sistemas de control modernos, la incorporación de sistemas para el diagnóstico de fallas (SDF) en los sistemas automatizados es cada vez más demandante. El objetivo de los SDF es el mejorar la tolerancia a fallas de los sistemas de control a fin de evitar estados críticos del proceso y situaciones catastróficas de gran costo económico y social, entendiéndose por falla todo cambio en el comportamiento de alguna componente del sistema (desviación no permitida de alguna de sus propiedades o parámetros característicos) de manera que éste ya no puede satisfacer la función para la cual fue diseñado [1].

Desde la perspectiva del control automático, algunos grupos consideran que la esencia de la metodología del diagnóstico de fallas es el enfoque *basado-en-modelo* en el que se utilizan modelos cualitativos o cuantitativos combinados con métodos analíticos o heurísticos. Es por ello que durante los últimos 30 años, constantemente se ha enriquecido el desarrollo de SDF basados en modelos analíticos, como lo describen numerosos artículos que han explorado el estado del arte [9,10,11,16,21]. Una tendencia reciente es lograr la integración de los SDF y el control tolerante a fallas (CTF) [21]. La tolerancia a fallas (TF) se entiende como la capacidad del sistema de control **para mantener los objetivos de control** a pesar de la aparición de una falla, admitiéndose una cierta degradación de sus prestaciones [1,16].

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Sciencie 36, 2008, pp. 23-32

El trabajo se estructura de la forma siguiente: en la sección 2 se presenta el problema de diagnóstico de fallas asociado al problema de control tolerante. La sección 3 corresponde al caso de estudio: la turbina de gas (TG) de una central de generación de ciclo combinado (CGCC) y las fallas críticas consideradas. En la sección 4 se describe el estudio de *redundancia analítica* realizado basado en 3 procedimientos diferentes. En la sección 5 se describe un estudio algorítmico desarrollado para sistematizar el análisis de redundancia. En la sección 6 se describe la modificación de la estructura del sistema físico, realizada para lograr la detección y aislamiento completo de las fallas consideradas, útiles para el control tolerante. La sección 7 es de conclusiones.

2 Diagnóstico de fallas

Para desarrollar el SDF primero se efectúa el análisis del sistema, que se lleva a cabo a nivel de estructura con el objetivo de determinar el nivel de redundancia existente y para la aplicación de mecanismos de tolerancia a fallas.

Diseño del sistema de diagnóstico: se parte del análisis estructural (AE), tomando en cuenta las variables medidas y las fallas posibles de identificar. El análisis estructural utilizado en SDF es una técnica basada en la teoría de grafos que explora las propiedades estructurales de un sistema utilizando grafos estructurales orientados [2,3,7,16,22]. Se usa para representar las relaciones existentes entre las variables y las restricciones (ecuaciones) del modelo de comportamiento, las cuales son independientes de la forma exacta bajo la cual se exprese dicho modelo (cuantitativo o cualitativo).

En un sistema complejo como la TG CGCC, es conveniente analizar el sistema partiendo de definir subsistemas, es decir componentes agrupadas estructuralmente y unidas funcionalmente. En el caso de que no se puedan diagnosticar todas las fallas que se deseen, entonces se deberá modificar la instrumentación disponible hasta conseguirlo. El SDF no solo deberá detectar y aislar las fallas, sino también estimar su tamaño (cuantificación).

2.1 Modelo estructural

La estructura del sistema físico puede obtenerse a partir del modelo de comportamiento normal $S=(R,V)$ definido mediante un conjunto de p restricciones $R=\{r_1,r_2,\ldots,r_p\}$, que pueden incluir derivadas, y un conjunto de q variables $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_q\}=X\cup U\cup Y\cup\Theta$ donde X corresponde al estado, U a la entrada, Y a la salida y Θ a los parámetros del sistema. El conjunto de variables V puede descomponerse en $V=X\cup K$, donde X es el subconjunto de variables no conocidas y K es el subconjunto de variables conocidas. $K=U\cup Y\cup\Theta$ contiene los subconjuntos de variables de control U, salidas Y, y parámetros de la estructura Θ [18].

2.2 Matriz de Incidencia

La estructura del modelo se puede representar mediante una matriz denominada Matriz Estructural ó Matriz de Incidencia (MI). Es una matriz cuyas filas se corresponden con las restricciones R del modelo y las columnas se corresponden con las variables V. Cada elemento $m_{ij} \in MI$ es '1' si y sólo si la variable de la columna j está contenida en la relación de la fila i, y '0' en caso contrario [18].

2.3 Aparejamiento perfecto (perfect matching)

El aparejamiento perfecto (AP) consiste en determinar el aparejamiento completo entre variables desconocidas x_i Î X y restricciones R a partir de las cuales las x_i pueden ser calculadas usando las variables conocidas, mediante un grafo bipartito: $G = (R \cup X, \Gamma)$, siendo Γ el conjunto de arcos orientados entre variables y restricciones. Con el aparejamiento es posible precisar las restricciones de un sistema que son necesarias para encontrar una solución para sus variables. Las variables que no forman parte del aparejamiento no pueden ser calculadas. Además las variables que pueden ser calculadas de diversas maneras presentan *redundancia*, la cual será de utilidad en la detección de fallas y en la realización de mecanismos de TF.

En general no existe una solución única para el AP. En el desarrollo de los SDF, el primer método de resolución fue el llamado *resolution process graph* [4] basado en la teoría de grafos. Posteriormente se definió un grafo de estructura o grafo bipartito a partir del cual es posible realizar el AP [12] y para sistematizar el AP en el diseño de los SDF en [2] se describe el algoritmo llamado *ranking* que realiza el número de pasos necesarios para calcular una variable desconocida a partir de las variables conocidas. Posteriormente el algoritmo anterior fue modificado vía la diagonalización de la matriz de incidencia y una formulación parametrizada de la matriz de incidencia aparejada MI^* del modelo estructural en forma triangular MI_T^* [18].

2.4 Ciclos en el grafo y aparejamiento causal

Algunos aparejamientos conducen a ciclos en el grafo orientado. Existen dos tipos: ciclos algebraicos y ciclos diferenciales. El primer tipo contiene solamente restricciones algebraicas, por lo que es posible resolver el sistema de ecuaciones que representa. El segundo tipo representa un sistema de ecuaciones algebraicas y ecuaciones diferenciales que no pueden ser resueltas si no se conocen las condiciones iniciales [2]. Un *aparejamiento causal* es aquel que induce un grafo orientado sin ciclos diferenciales [8,20].

2.5 Relación Redundante

De acuerdo a [16] una *relación redundante* (*RR*) no se ve involucrada en el AP en el grafo bipartito $G = (R \cup X, \Gamma)$. Cada *RR* origina una **relación de redundancia**

analítica (*RRA*) cuando las variables no conocidas involucradas en la *RR* son reemplazadas por su expresión formal. En [13] se asegura que las *RRAs* son ecuaciones deducidas a partir de un modelo analítico completo y solamente incluyen variables medidas. Además, a partir de un conjunto finito de *RRs* es posible deducir un conjunto de *RRAs* mediante un procedimiento de cálculo "hacia atrás" (backtracing) de las variables desconocidas contenidas en cada *RR* de MI_T^* [14].

2.6 Descomposición estructural canónica

La descomposición estructural de un grafo bipartito de un modelo de simulación es conocida como *descomposición Dulmage-Mendelsohn* (DDM) [6]. Canónicamente descompone cualquier aparejamiento máximo de un grafo bipartito en tres subsistemas:

1. Sobre-restringido denotado por S^+, con más restricciones que variables.
2. Justo-restringido denotado por S^0, con igual número de variables y restricciones.
3. Sub-restringido denotado por S^-, con más variables que restricciones.

La utilidad de la DDM en los SDF resulta al considerar que si la redundancia describe información extra en un sistema, y esta se presenta cuando el número de restricciones es mayor que el número de variables desconocidas, **entonces un sistema con redundancia debe ser un subsistema sobre-restringido**. Con el algoritmo de Potten & Fan [17] se desarrolló una importante herramienta computacional en Matlab® a partir de la cual es posible sistematizar la obtención de relaciones redundantes partiendo de la matriz de incidencia *MI* del modelo analítico.

2.7 Inconsistencia y Residuos

Los SDF de sistemas complejos representados por modelos analíticos deterministas se basan en la inconsistencia entre el comportamiento actual del proceso y el comportamiento esperado el cual está descrito por un modelo analítico. La *inconsistencia* se muestra en señales llamadas *residuos*. Los residuos son señales generadas mediante el procesamiento de las señales medidas de entrada y salida de la planta, además de un subconjunto adicional de variables monitoreadas del sistema.

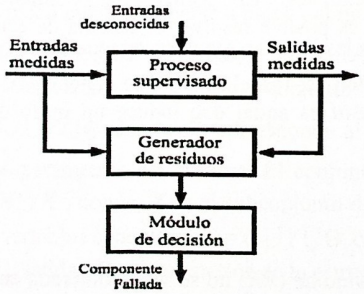


Figura 1. Estructura de un sistema de diagnóstico de fallas

Entonces es necesario asegurar la monitoreabilidad del sistema para garantizar la redundancia de las variables medidas adicionales que son necesarias. En un punto de equilibrio de la planta (estado estacionario deseado) en ausencia de fallas los residuos son cero. Cuando ocurre una falla, los residuos asociados al subsistema fallado se desvían de cero. El objetivo del módulo de decisión mostrado en la Fig. 1 es determinar cuales residuos difieren de cero lo suficiente para indicar las componentes falladas (detectabilidad).

2.8 Detectabilidad y aislabilidad estructural

Un residuo es estructuralmente sensible a una falla f_i si esta falla afecta alguna de las restricciones usadas para generarlo [16]. Además el conjunto de fallas a las que es sensible el residuo se conoce como su *firma de fallas*. Entonces si se determina la firma de fallas de cada residuo, es posible construir la matriz de firma de fallas, que se genera concatenando todas las firmas de fallas posibles. Cada línea corresponde a un residuo y cada columna a una falla, de manera que un 1 en la posición (i, j) significa que la falla j es detectable por el residuo i *(detectabilidad estructural)*. Cuando dos firmas son idénticas se sabe que las fallas no son distinguibles entre sí. Para visualizar la propiedad de aislamiento de fallas, o *aislabilidad estructural*, se construye la *matriz de aislamiento*: una matriz cuadrada en la cual cada fila y cada columna corresponde a una falla, de manera que un 1 en la posición (i, j) significa que la falla i no es aislable de la falla j [11].

3 Caso de estudio

3.1 Proceso

La TG de la Fig. 2 es una de dos unidades que junto con dos recuperadores de calor y una turbina de vapor integran la central de generación de ciclo combinado Westinghouse PACE260 de la Comisión Federal de Electricidad. Por medio del análisis estructural aplicado al modelo matemático de la TG [5] se busca determinar la viabilidad de diagnosticar fallas mecánicas y fallas térmicas usando las mediciones de dicha instalación. Cada unidad de la TG se encuentra formada por los siguientes equipos: compresor, cámara de combustión, turbina de gas, generador eléctrico, recuperador de calor y actuadores.

El modelo de comportamiento simplificado de la unidad consiste de 28 ecuaciones no lineales (19 estáticas y 9 diferenciales) 3 acciones de control, 4 actuadores y 12 señales de proceso (velocidad, presiones y temperaturas), mientras que el modelo estructural consiste de 37 restricciones $c_i \in R$, 27 variables desconocidas $x_i \hat{\mathrm{I}}\ X$, 19 variables conocidas $k_i \hat{\mathrm{I}}\ K$ y 28 parámetros $\theta_i \in \Theta$ que generan la matriz de incidencia *MI* [19].

3.2 Fallas críticas

Fallas mecánicas en el acoplamiento del rotor del turbogenerador y *fallas térmicas* en la cámara de combustión afectan la potencia eléctrica k_{13} producida por el generador de la unidad. Ambas fallas se pueden emular mediante variaciones de parámetros del modelo: θ_{11} *fricción en el rotor del turbogenerador,* y θ_9 *poder calorífico del combustible*, respectivamente. Entonces ante un cambio en la potencia eléctrica k_{13}, el módulo de decisión del SDF debe indicar la causa.

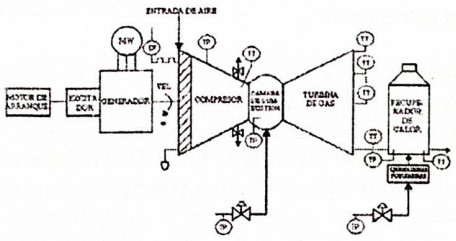


Figura 2. Componentes de la turbina de gas

4. Estudio de redundancia analítica

Se estudió la propiedad estructural de redundancia analítica del modelo de TG para determinar los grados de monitoreabilidad, detectabilidad y aislabilidad de fallas, mediante los casos siguientes:

Caso 1. Se construyó la matriz de incidencia *MI* y se calculó la matriz de incidencia aparejada triangular MI_T^* [2,18,20] obteniéndose 10 *RRs.* Después se realizó el cálculo "hacia atrás" para obtener las correspondientes *RRAs* (ecuaciones de paridad).

Caso 2. Con el programa SaTool [15] se obtuvo un grafo del modelo estructural, Fig. 3(a), y un conjunto de 10 *RRA*s.

Caso 3. Se calculó la descomposición canónica DM de la *MI* del modelo estructural [17] y se obtuvieron subsistemas $\boldsymbol{S}^0 \in \mathbf{R}^{7\times7}$ y $\boldsymbol{S}^+ \in \mathbf{R}^{30\times20}$ de 10 *RRs*, Fig. 3(b).

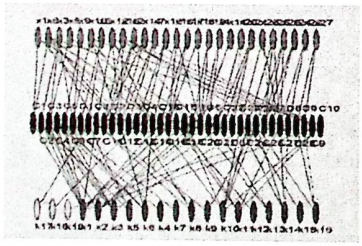
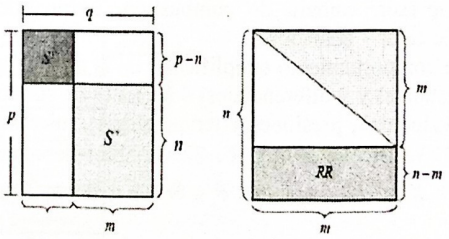


Figura 3. (a) Grafo estructural,



(b) Descomposición DM:
$p=37, q=27; n=30, m=20; p-n=q-m=7$

Se obtuvieron tres conjuntos iguales con 10 *RRs* cada uno. El sistema completo resultó ser monitoreable [18,20], pero *un hallazgo importante fue el haber encontrado un subsistema* S^0 *sin redundancia y por tanto no detectable ante fallas* [19] que afecta la restricción c_{20}, Fig. 4. El análisis efectuado muestra que la estructura no permite la detección de fallas mecánicas en el acoplamiento rotor-generador, ni la detección de cambios en la velocidad del rotor k_2. Además los parámetros de *inercia del turbogenerador* θ_{20} y *fricción del rotor* θ_{11} no son detectables.

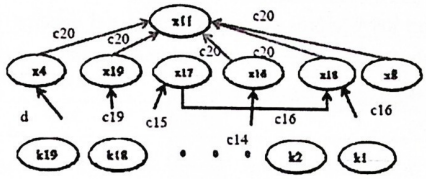


Figura 4. Subsistema sin redundancia S^0

5. Estudio algorítmico

El análisis de los resultados anteriores mostró la existencia de ciclos diferenciales en las trayectorias de cómputo de variables aparejadas en S^+. Con el objetivo de garantizar la *redundancia completa del sistema y la calculabilidad* de las variables desconocidas $x_i \hat{I} X$ en S^+, se propone un algoritmo que calcula todos los AP posibles, con el propósito de juntar todas las estructuras de residuos, sin pérdida de información y con la capacidad de distinguir las diferentes fallas unas de otras.

Algo-fdi-1:

(1) Calcular la descomposición DM de MI de $p \times q$

(2) Identificar el sistema S^+ de $(n \times m)$ con $n > m$

(3) Calcular todos los AP en S^+:
- Con combinaciones de n restricciones en grupos de m variables
- Seleccionar combinaciones de *rango estructural completo* (*Comb_REC*).[1]

(4) Clasificar *Comb_REC* en función de ciclos diferenciales, de acuerdo a las siguientes propiedades:

p_1 : Derivadas con 2 variables desconocidas $x_{i+1} = dx_i / dt$

p_2 : Derivadas con 1 variable desconocida $x_i = dk_j / dt$

$p_3 \square p_1.and.p_2$, se cumplen p_1 y p_2

$p_4 \square \overline{p_1}\,and.\overline{p_2}$, *no se cumplen: ni* p_1 *ni* p_2

(5) Con p_4 calcular la $MI_T{}^*$ y a partir de esta las *RRs* del sistema.

(6) Determinar *RRAs* del sistema como función de variables $v_q \in V \subset K$

[1] Conocidas como Bloques de König-Hall (*BKH*)

(7) Hallar expresiones analíticas de los residuos y calcular matrices de firmas.

Resultados obtenidos con Algo-fdi-1:

Tabla 1

Comb_REC	p_1	p_2	p_3	p_4
65,496	1993	86	63.415	**2**

A cada caso de p_4 se le asociaron los vectores correspondientes del sistema S^+ y se obtuvo la matriz aparejada triangularizada sin derivadas en el aparejamiento, Fig. 5.

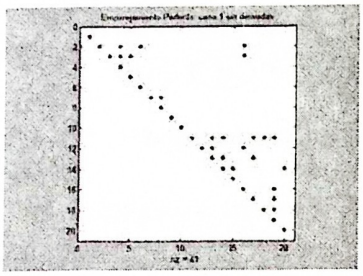


Figura 5. Subsistema S^+ sin derivadas en la secuencia de aparejamiento

Se encontró que los 2 conjuntos de 10 *RRAs* son iguales. Con lo anterior es posible asegurar que el modelo estructural de TG descrito en la Sección 3 contiene **un conjunto único de 10 *RRAs*** y un *subsistema no detectable de fallas mecánicas.*

6. Modificación de la estructura

El subsistema S^0 de la Fig. 4 involucra energías consumidas por el compresor x_8 y por fricción del rotor x_{19} y la energía suministrada por el motor de arranque x_{11}. También vincula la entalpía de los gases en la cámara de combustión x_{16} y la entalpía de los gases de escape de la turbina x_{18} con la densidad de los gases de escape x_{17} y la aceleración del rotor x_4. Con este conjunto de variables asociadas a la trayectoria de gases producidos por la combustión se calcula la eficiencia de la turbina de gas en régimen térmico. Entonces surge la pregunta sobre ¿cual(es) debe(n) ser la(s) variable(s) que se puede(n) medir de la trayectoria de gases para construir un grafo redundante que involucre al nodo c_{20}?

Como el aparejamiento de S^0 se reduce al grafo de la Fig. 4, se observa que para que este se transforme en un grafo redundante es necesario conocer el nodo x_{11} (asociado a la energía del motor de arranque), por lo que es razonable adicionar un dinamómetro a la instrumentación de la unidad para calcular x_{11} a partir de la medición del torque. Consecuentemente se modificó la estructura del modelo haciendo conocida a la

variable x_{11}, es decir con $k_{20} \square x_{11}$. Entonces el modelo estructural modificado quedó de 37x26, con 20 variables conocidas, por lo que se procedió a realizar el estudio de redundancia a fin de obtener el conjunto completo de residuos de la *nueva estructura*: Se obtuvieron 11 *RRs* (10 obtenidas anteriormente y una más). De esta forma con la medición k_{20} es posible detectar y aislar las fallas emuladas con variaciones en θ_{11} y θ_9. La Tabla 2 muestra las firmas de ambas fallas consideradas:

Tabla 2. Detección de fallas originadas por parámetros

FALLA	Mecánica: Δ_{11}	Térmica: Δ_9
RRA_6	0	1
RRA_8	0	1
RRA_{11}	1	1

Pruebas.- Para verificar el resultado del análisis se simuló el proceso con los parámetros tomados de [5] en condiciones de falla y normales. En condición nominal del modelo en estado estacionario de carga base, los residuos se mantuvieron en cero como era de esperarse. En condiciones de falla se consideraron dos escenarios:
(1) Desviación en el factor de fricción del rotor $\Delta_{11} = \theta_{11} \times F_{f11}$, factor de falla $F_{f11} > 1$.
(2) Desviación por pérdida de poder calorífico $\Delta_9 = \theta_9 \times F_{f9}$, factor de falla $F_{f9} < 1$.

Al cambiar el valor del parámetro la potencia eléctrica generada k_{13} disminuye mientras que la velocidad k_2 permaneció constante.

7. Conclusiones

La aplicación del AE a un sistema complejo con requerimientos estrictos de operación mostró la capacidad de la técnica para determinar la redundancia analítica completa, para la implementación del generador de residuos robusto, asegurando no tener ciclos diferenciales en la secuencia de cómputo de las variables desconocidas del modelo con aparejamiento perfecto. Además, al modificar la estructura del modelo se obtuvo un sistema TG completamente monitoreable y detectable ante fallas de sensores, actuadores, señales de control y parámetros del proceso, mediante 11 *RRAs*.
El estudio de aislabilidad de ambas fallas que afectan la potencia generada de la TG mostró que son distinguibles. Está pendiente la identificación de la magnitud de las fallas, sin embargo dado que las especificaciones de esta tarea dependen en cierta medida del esquema de control seleccionado, se tiene previsto atacarla de manera conjunta con la tarea de control.

Referencias

[1] Blanke, M., Frei, C.W., Kraus, F., Patton, R.J., Staroswiecki, M.: What is Fault-tolerant Control? In: Proc. of 4th IFAC Symposium SAFEPROCESS'00, pp. 40-51 (2000).

[2] Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J. y Staroswiecki, M.: *Diagnosis and fault tolerant control.* Springer, Berlin (2003).
[3] Cassar, J.P., M. Staroswiecki y P. Declerk (1994). Structural decomposition of large scale systems for the design of failure detection and identification procedures. *Systems Science.*
[4] Cassar, J. and Staroswiecki, M.: A structural approach for the design or failure detection and identification systems. In: Proc. of IFAC/IFIP/IMACS Conference on Control of Industrial Processes. Belfort, France, (1997).
[5] Delgadillo, M.A. and Fuentes J.E.: Modelo dinámico de la turbina de gas. Informe técnico No. IC-5117-MOD-TG-2.0, Proyecto 5117. IIE, México (1996).
[6] Dulmage, A.L. and Mendelsohn, N.S.: Covering of bipartite graphs. Canadian J. of mathematics, **10**, 517-534, (1958).
[7] Düştegör, D, Cocquempot, V. and Staroswiescki, M.: Structural analysis for fault detection and isolation: an algorithm study. In: Proc. of 2nd IFAC Symposium SSSC´04, 134-139, (2004).
[8] Düştegör, D., Frisk, E., Cocquempot, V., Krysander, M. and Staroswiecki, M.: Structural analysis of fault isolability in the DAMADICS benchmark. Control Engineering Practice, **14** (6), 597-608, (2006).
[9] Frank, P.M.: Quantitative and qualitative model-based fault diagnosis- A survey and some new results, European Journal of Control, **2**(1), 6-28, (1996).
[10] Isermann, R. and Ballé, P.: Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control Engineering Practice*, **5**(5), 709-719, (1997).
[11] Ding, S. X.: Model-based Fault Diagnosis Techniques. Springer, Berlin (2008).
[12] Izadi-Zamanabadi, R. and Blanke, M.: Structural analysis for Diagnosis-The matching problem. In: Proc. of 15th Triennial World Congress. Barcelona, Spain, (2002).
[13] Kinnaert, M.: Fault diagnosis based on analytical models for linear and nonlinear systems – A tutorial. In: Proc. of 5th IFAC Symposium SAFEPROCESS´03, pp 37-50, (2003).
[14] Lorentzen T., Blanke, M. and Niemann, H.: Structural Analysis– A case study of the Romer satellite. In: Proc. of 5th IFAC Symposium SAFEPROCESS´03, pp. 187-192. (2003).
[15] Lorentzen, T. and Blanke, M.: Industrial use of structural analysis – a rapid prototyping tool in the public domain. In: Colloque Annuel IAR. Karlsruhe, Germany, *pp*. 187-192, (2004).
[16] Puig, V., Quevedo, J., Escobet, T., Morcego, B. y Ocampo, C.: Control tolerante a fallos (Parte I): Fundamentos y diagnostico de fallos. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, **1**(1), 15-31, (2004).
[17] Pothen, A. and Fan, Ch.: Computing the blok triangular form of a sparse matrix. ACM Trans. on mathematical software, **16**(4), 330-324, (1990).
[18] Sánchez, M. and Verde, C.: Analytical Redundancy for a Gas Turbine of a Combined Cycle Power Plant. In: Proc. ACC´06, pp. 4442-4447, Minneapolis, MN, USA, (2006).
[19] Sánchez, M. and Verde, C.: Structural analysis for sensor fault detection in combined cycle power plant units. In: Proc. 2nd International Conference on Dynamics, Instrumentation and Control. Querétaro, México, (2006).
[20] Verde, C. and Sánchez, M.: Monitorability analysis for a gas turbine using structural analysis. In: Proc. of 6th IFAC Symposium SAFEPROCESS'06, **13**(), 721-726. Beijing, China, (2006).
[21] Zhang, Y. and Jiang, J.: Issues on integration of fault diagnosis and reconfigurable control in active fault-tolerant control systems. In: Proc. of 6th IFAC Symposium SAFEPROCESS'06, **13**(), 1513-1524. Beijing, China, (2006).
[22] Verde, C.: Análisis de fallas usando sistemas estructurados. En: Memoria Congreso Annual de la AMCA, 182-187, (2004).

Diagnóstico de fallas del sistema COSY mediante Redes de Petri Híbridas

José E. Martínez-Prieto[1], Carlos D. García-Beltrán[1] ,Dionisio A. Suárez-Cerda[2]

[1]Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Interior Internado Palmira s/n, Col. Palmira. Cuernavaca, Morelos,
México C.P. 62490 Tel. 01(777) 362-77-70
[2]Instituto de Investigaciones Eléctricas, Calle Reforma # 113,
Col. Palmira, 62490, Cuernavaca, Morelos , México,
(emartinez04e, cgarcia)@cenidet.edu.mx, suarez@iie.org.mx

Resumen. En la actualidad, la mayoría de los procesos industriales presentan una gran complejidad. La gran cantidad de variables y la complejidad de sus relaciones complican el diseño de los lazos de control como de supervisión. Esta complejidad se ve acentuada dada la necesidad de realizar numerosos cambios en los modos de operación, lo cual representa formalmente una dinámica híbrida (comportamientos continuos y discretos fuertemente ligados). En este artículo se presenta un esquema de diagnóstico de fallas, basado en redes de Petri, aplicado al sistema de tanques acoplados, de comportamiento híbrido, conocido como sistema COSY (*Complex System*).

1 Introducción

Con el tiempo, todo sistema físico manifiesta degradaciones en la dinámica de su comportamiento. Esto puede atribuirse a diferentes causas, como por ejemplo, desgaste por fricción, deterioro por sobrecalentamiento o envejecimiento natural. Estos cambios evolucionan gradualmente, hasta llegar a convertirse en fallas. En la actualidad, la mayoría de los procesos industriales presentan una gran complejidad. La gran cantidad de variables y la complejidad de sus relaciones complican el diseño de los lazos de control como de supervisión. Esta complejidad se ve acentuada dada la necesidad de realizar numerosos cambios en los modos de operación del proceso, lo cual representa formalmente una dinámica híbrida. Los sistemas dinámicos híbridos son sistemas dinámicos que integran de manera explícita y simultánea sistemas continuos y discretos, los cuales requieren para su descripción, el uso de modelos de tiempo continuo, modelos en tiempo discretos y la interfase entre ellos [1].

Debido al considerable incremento en el tamaño y a la complejidad de los procesos industriales, en la actualidad un operador está prácticamente imposibilitado para realizar

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 33-42

las tareas de diagnóstico de fallas en línea. Aunado a esto, los riesgos físicos que pueden derivarse de las fallas, incrementan la necesidad de los sistemas automáticos de diagnóstico de fallas. Una manera de reducir el efecto de las fallas en un sistema de producción, consiste en tener el conocimiento de la existencia de una falla y subsecuentemente la puesta en marcha de las acciones correctivas o preventivas según sea el caso. El concepto de diagnóstico de fallas se relaciona con la primera etapa y comprende tanto la detección, como la localización de ésta.

En este artículo se presenta una estrategia de diagnóstico de fallas para sistemas híbridos. El contenido de este artículo es el siguiente: en la sección 2 se presentan las ideas principales del diagnóstico basado en modelo. En la sección 3, se resumen las bases de funcionamiento de las Redes de Petri, abarcando las redes discretas y continuas. En la sección 4 se presentan las Redes de Petri Híbridas, En la sección 5, se describe el sistema de tanques acoplados, conocido como sistema COSY, en la sección 6 se presentan algunas pruebas de diagnóstico de fallas para el sistema COSY y finalmente en la sección 7 se discuten algunas conclusiones.

2 Diagnóstico de Fallas

En la actualidad, existen numerosas técnicas para realizar el diagnóstico de fallas, ver por ejemplo la clasificación presentada en [2]. La idea básica del diagnóstico de fallas es verificar la consistencia entre el funcionamiento real del sistema y aquel para el cual fue diseñado. De esta forma, un *test de consistencia*, o *test de coherencia*, tiene por finalidad verificar si un conjunto de datos, representativos del estado real de un sistema físico, es coherente con el conocimiento previo del comportamiento de dicho sistema. De manera general, un *test de coherencia* se basa en un modelo de comportamiento en el que intervienen solamente variables y parámetros conocidos: este modelo es una agregación de relaciones de comportamiento elementales, llamados *Relaciones de Redundancia Analítica* (RRA). Efectuando la combinación adecuada de RRA con soportes diferentes (sensibles a fallas particulares y/o, verificando componentes físicos distintos) es posible localizar el o los componentes en falla, de acuerdo a los *test de coherencia* que produzcan un resultado de inconsistencia.

Los test de coherencia son concebidos de tal forma que faciliten su uso posterior mediante una etapa de decisión de diagnóstico, la cual permita la localización de los componentes en falla. Mediante la direccionalidad de los residuos o su estructuración es posible simplificar los procedimientos de diagnóstico. En el enfoque de estructuración, los residuos son pensados de tal forma que respondan a subconjuntos de fallas diferentes. Estos subconjuntos de fallas permiten estructurar una tabla de firmas, las cuales traducen la influencia de las fallas sobre los residuos.

La mayor parte de los trabajos publicados en el área de diagnóstico de fallas se enfocan al problema de diagnóstico de fallas para sistemas con dinámica continua, ver por ejemplo [3]. Sin embargo, el comportamiento bajo dinámicas híbridas ocurre en una gran

variedad de procesos. El sistema de diagnóstico de sistemas híbridos debe tomar en cuenta el cambio en el modo de operación del sistema. Los principales trabajo en este tipo de sistemas se deben a Biswas [4] cuya herramienta de base son los Bodgraphs Híbridos. Sin embargo, existen algunas alternativas que permiten el manejo de las dinámicas híbridas, tal como las Redes de Petri.

3 Redes de Petri Discretas y continuas

Las redes de Petri aparecieron en la literatura con la tesis doctoral de Carl Adam Petri en 1962, como una herramienta matemática que permite modelar eventos discretos de una manera gráfica y fácil de visualizar. En la década de los setenta, su estudio y aplicación se extendió debido a su versatilidad para el análisis y modelado de sistemas dinámicos. Más tarde, en [5] se presenta el concepto de Redes de Petri continuas, las cuales permiten modelar eventos continuos. Posteriormente, se desarrollan las redes de Petri híbridas que combinan los dos tipos de redes de Petri [4, 6].

3.1 Redes de Petri Discretas

Las redes de Petri son un tipo de grafo dirigido compuestas por dos tipos de nodos: los lugares y las transiciones. Los lugares son representados por círculos y las transiciones por rectángulos o por barras. Los lugares y transiciones se conectan entre sí por medio de arcos. El número de lugares y transiciones es finito y diferente de cero, aunque pueden existir redes degeneradas que no contengan a alguno de éstos. La Fig. 1 muestra una red de Petri formada por tres lugares, una transición y tres arcos. El conjunto de lugares se denota por P y el conjunto de transiciones es denotado por T, de donde, para este ejemplo: $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $T = \{t_1\}$. El lugar p_1 es el lugar de entrada de la transición t_1 y el lugar p_3 es el lugar de salida de la misma transición. Una transición sin lugar de entrada se llama *transición fuente* y una transición sin lugar de salida se denomina *transición destino*

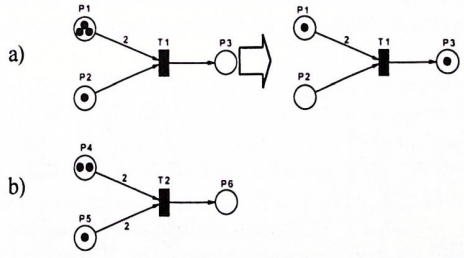


Fig. 1. Red de Petri Discreta

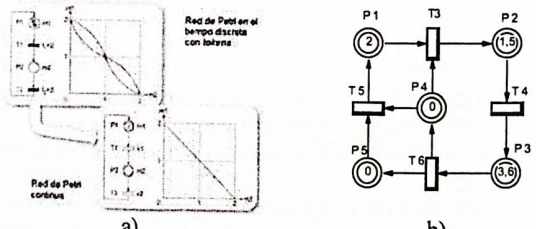
En la Fig. 1 a), a la izquierda de la flecha, se muestra una red de Petri con marcas en los lugares p_1 y p_2, estas marcas se denominan *tokens*. El número de *tokens* es expresado como $M(P_i)$ o por m_i. En la red mencionada, se tiene que $m_1 = 3$, $m_2 = 1$ y $m_3 = 0$. El estado de la red está determinado por el vector de *tokens*, para la red es $M = (3, 1, 0)$. Los *tokens* pueden moverse por la red y así cambiar el estado de la misma. Para que un *token* vaya de un lugar a otro, se necesita que las transiciones sean disparadas.

Para disparar una transición, es necesario que en sus lugares de entrada exista al menos el mismo número de tokens que el valor del peso del arco de conexión. En la Figura 1 la transición t1 está activada, llevando al estado de la red de la derecha. El disparo de una transición consiste en tomar tantos tokens del lugar de entrada como el peso del arco indique y agregarlos al lugar de salida.

3.2 Redes de Petri Continuas

Se puede aproximar la dinámica de sistemas continuos utilizando modelos basados en redes de Petri discretas, para la solución de estos modelos, se pueden utilizar aproximaciones como enumeración de estados, transformación de la red o técnicas estructurales. [7]. Sin embargo, las técnicas anteriores sólo pueden emplearse a algunas subclases de redes, además de que es factible que se presente el fenómeno conocido como explosión de estados. Conociendo estas limitantes y para obtener una mejor aproximación de la dinámica de los sistemas continuos, en 1987 David y Alla introdujeron el concepto de redes de Petri continuas [5].

El fundamento de las redes de Petri continuas se puede observar en la Fig. 2, y puede ser revisado en [8]. El espacio de estados de la red tradicional consiste sólo en tres estados discretos. Los dos *tokens* iniciales en el lugar *P1* pueden viajar por la red, cuando se cumplan las condiciones de disparo establecidas en las transiciones de la red de Petri. El modelo representado en la parte inferior de la figura, muestra una extensión utilizando lugares y transiciones continuos. En este caso, los *tokens* se dividen en una cantidad real de fragmentos, los cuales reciben el nombre de *marcas*. Las transiciones continuas, al ser disparadas, mueven estas *marcas* para cambiar el estado de la red. El espacio de estados se convierte en un espacio de dimensión infinita, permitiendo el modelado de eventos continuos.



a) b)

Fig. 2. Red de Petri discreta y red de Petri continua

Las redes de Petri continuas son un modelo en el cual las marcas en los lugares son representadas por números reales, esta consideración, permite un manejo de un número grande de marcas, relativamente más sencillo, comparado con el que se presenta en las redes de Petri discretas. Tomando como ejemplo la Fig. 2 b), su estado inicial es (2, 1.5, 3.6, 0, 0). En el caso de las redes continuas, no es usual que los arcos tengan peso, el flujo de las marcas esta determinado, generalmente, por la función de peso definida en las transiciones. En una Red de Petri continua, el grado de activación de una transición Tj para una marca m, denotado por q o $q(Tj, m)$, es un número real q tal que:

$$q = \min_{i,P_i \bullet T_j} \left(\frac{m(P_i)}{\mathrm{Pre}(P_i, T_j)} \right) \qquad (1)$$

Una transición T_j estará activada si, para cualquier lugar P_i en ${}^{o}T_j$, $M(P_i) > 0$. Dicho de otra forma, una transición T_j, está activada, si y sólo si, $M(P_i)/\mathrm{Pre}(P_i, T_j) > 0$, para cualquier P_i. En la Fig. 2 b, las transiciones T_1, T_2, T_3 y T_5, están activas. La transición T_3 está 2-activada, dado que $m_3/\mathrm{Pre}(P_3, T_3) = 2$. Cuando una transición es q-activada es disparada, la cantidad de disparo es r, donde r es un número real, $r \leq q$. La cantidad de *tokens* que se toman del lugar anterior para llevarlos al siguiente, esta definida por la matriz de incidencia.

4 Redes de Petri Híbridas

El fundamento de las redes de Petri híbridas se resume en [8]: "si se puede describir la dinámica continua de un sistema con redes de Petri continuas, y si se pueden combinar los modelos obtenidos con el mundo discreto de las redes de Petri discretas, se puede modelar el complejo comportamiento híbrido de los sistemas con sólo una representación gráfica, en este caso, las redes de Petri híbridas". Los primeros estudios y el desarrollo de este tipo de redes se llevaron a cabo por René David, Hassane Alla y J. Le Baile en 1991 [9]

Formalmente, una *RdPH no marcada* es un par $H^* = \langle Q, h \rangle$, que cumple las siguientes dos condiciones [9]:

1. Q es una red de Petri no marcada, $Q = \langle P, T, Pre, Post \rangle$, donde $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ es un conjunto finito, no vacío, de lugares. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ es un conjunto finito, no vacío, de transiciones. $P \cap T = \varnothing$, los conjuntos P y T son disjuntos. $Pre : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ es la aplicación de la entrada de incidencia. $Post : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ es la aplicación de la salida de incidencia. $h : P \cup T \rightarrow \{D, C\}$, es la función híbrida, indicada para cada nodo, ya sea continuo o discreto.
2. *Pre* y *Post* son funciones con el siguiente criterio: si P_i y T_j son lugares y transiciones tales que $h(P_i) = D$ y $h(T_j) = C$, entonces $Pre(P_i, T_i) = Post(P_i, T_j)$, debe verificarse.

Al igual que en las redes de Petri ordinarias, las redes híbridas son grafos bipartitas orientados. Los lugares son representados por círculos. Los lugares y las transiciones son unidos por medio de arcos orientados. El valor de la función de entrada *Pre* está asociado con cada arco que une un lugar con una transición; el valor de la función de salida *Post* está asociado con cada arco que une una transición con un lugar.

Una *RdPH marcada* es un par $H = \langle H^*, M_0 \rangle$, donde H^* es una red de Petri híbrida no marcada y M_0 es el vector de marcas inicial. Las marcas iniciales para los lugares discretos deben ser números enteros positivos o cero, y las marcas iniciales para los lugares continuos deben ser números reales o cero.

Como una extensión a las ideas presentadas en [9] y [10], en [11] se propone el concepto de redes híbridas dinámicas, las cuales son una extensión de las redes de Petri híbridas. Con las adecuaciones propuestas en [11], es posible modelar todas las partes dependientes del sistema con un solo lenguaje descriptivo. En una RdPH, los lugares discretos representan entidades que pueden ser numeradas y s los lugares continuos representan entidades que no pueden ser numeradas. Un número real se asocia a cada lugar continuo. Las transiciones discretas de disparan después de un retardo de tiempo *dt*. Las transiciones continuas se disparan continuamente a una velocidad *v(t)*.

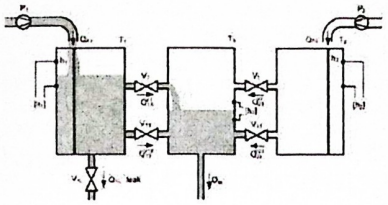
Para el modelado con redes híbridas dinámicas, además de los lugares y transiciones discretos y continuos, se incluyen 2 nuevos tipos de arcos, un arco inhibidor y un arco de prueba, Fig. 3.

TIPO DE ARCO	SÍMBOLO	PROPIEDADES
a) arco normal	——▶	Activan transiciones consumiendo recursos
b) arco inhibidor	——▶○	Inhiben transiciones y consumen recursos
c) arco de prueba	- - - - - ▶	Activan transiciones sin consumir recursos

Fig. 3. Tipos de arcos en las redes híbridas dinámicas

5 Descripción del sistema COSY

El caso de estudio es un sistema de tres tanques acoplados, conocido como COSY [12]. El sistema consiste de tres tanques acoplados, el cual se muestra en la Fig. 4. Estos tanques se interconectan mediante tuberías y el flujo que circula a través de ellas es controlado por un conjunto de válvulas. El líquido es vaciado en los tanques de la izquierda y de la derecha utilizando dos bombas, P1 y P2. Las mediciones disponibles en son: el nivel continuo de agua h_i de los tanques T_1 y T_2, y los niveles discretos *bajo, medio* y *alto* en el tanque T_3.



Para todos los casos:

$$Q_{13}^{V_{13}} = a_z \cdot S \cdot \text{sgn}(h_1 - h_3) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |h_1 - h_3|}$$

$$Q_N = a_z \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_3}$$

$$Q_{Leak}^{V_{1L}} = a_z \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \cdot Pos(V_{1L})$$

Dependiendo de los niveles y aperturas de válvulas:

1. $h_1 < 0.3m; h_3 < 0.3m$ o V1 cerrada

$$Q_{13}^{V_1} = 0$$

2. $h_1 < 0.3m; h_3 \geq 0.3m$ y V1 abierta

$$Q_{13}^{V_1} = a_z \cdot S \cdot \text{sgn}(0.3 - h_3) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |0.3 - h_3|}$$

3. $h_1 \geq 0.3m; h_3 < 0.3m$ y V1 abierta

$$Q_{13}^{V_1} = a_z S \cdot \text{sgn}(h1 - 0.3) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |h_1 - 0.3|}$$

4. $h_1 \geq 0.3m; h_3 \geq 0.3m$ y V1 abierta

$$Q_{13}^{V_1} = a_z \cdot S \cdot \text{sgn}(h1 - h_3) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot |h_1 - h_3|}$$

Fig. 4. Esquema del sistema COSY y las ecuaciones que rigen su comportamiento cuando el tanque 2 está deshabilitado.

El objetivo principal de los tanques es proporcionar un flujo continuo Q_N a la salida del tanque T_3. El nivel de de este tanque debe ser mantenido en el nivel *medio*. El tanque T_1 es llenado mediante la bomba P_1 hasta un nivel nominal de h_1^{nom} = 50 cm. El flujo de agua entre los tanques puede ser controlado mediante las válvulas todo-nada V_1, V_{13}, V_2 y V_{23}. Para el caso nominal, las válvulas V_{13}, V_2 y V_{23} están cerradas y no operan. La válvula V_1 se utiliza para controlar el nivel del tanque T_3. La válvula V_{1L}, que puede utilizarse para simular una fuga en el tanque 1, permanece cerrada. La interconexión de tuberías en los tanques se localiza en el fondo y a una altura de 30 cm. Los términos Q_{P1} y Q_{P2} son los flujos de salida de las bombas P_1 y P_2 respectivamente. La altura máxima de cada tanque es de 60 cm. Dependiendo de la posición de las válvulas y el nivel de agua en cada uno de los tanques, es posible que el sistema tenga diferentes comportamientos. En este artículo se expone el caso en donde el tanque T2 no está en funcionamiento, sin embargo se incluye en el modelo. Bajo las siguientes condiciones: V1 y V13 activa, V23 y V2 cerradas y la bomba P2 apagada, se tienen los comportamientos descritos en la Fig 4.

6 Diagnóstico de fallas del sistema COSY

En la Fig. 5 se presenta un modelo con redes híbridas de objetos del sistema de tanques acoplados. En la parte superior se modela la parte continua del sistema. Se consideran como conocidos (medidos) los tres niveles de los tanques, los cuales representan los tres lugares de la RdPH. Las entradas a la red son los flujos proporcionados por las bombas P1

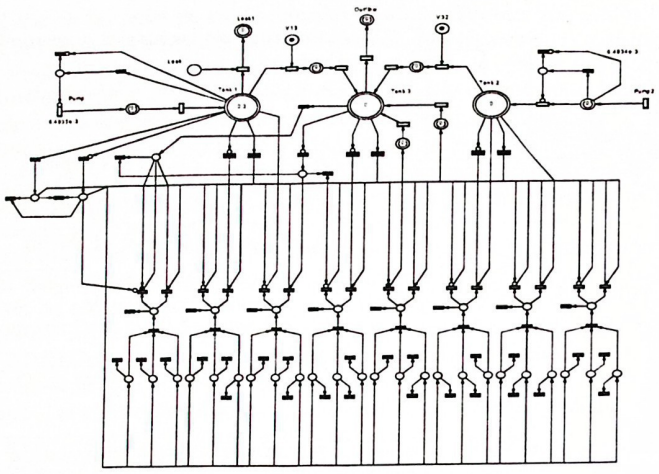


Fig. 5. Red de Petri Híbrida del sistema COSY

y P2. En la parte inferior se encuentra la RdP discreta, en donde se tiene las ocho posibles formas de operación del sistema. La interfase entre la parte continua y la parte discreta es llevada a cabo mediante los arcos inhibidores. En las siguientes subsecciones se presentan algunas simulaciones, tanto en estado de buen comportamiento como bajo condiciones de falla.

6.1 Operación nominal del sistema

En la Fig 6 se muestran los resultados de una prueba de validación del modelo obtenido con RdPH para el caso de buen comportamiento.

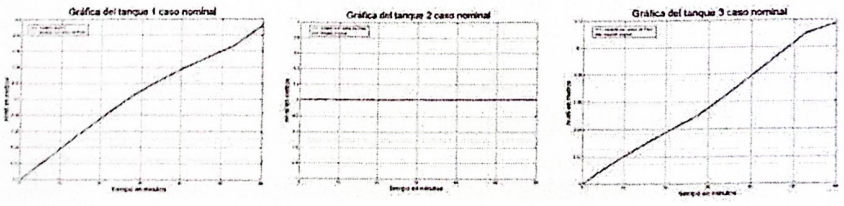


Fig. 6. Gráfica de los niveles en los tanques 1, 2 y 3 en operación normal, modelo y proceso

Pueden observarse los cambios en los niveles de los tanques 1 y 3, y ligeros cambios en el comportamiento al momento que el nivel del tanque 1 sobrepasa los 30 cm. Una vez que se obtiene el modelo de buen comportamiento con redes de Petri, se utilizan relaciones de redundancia analítica para realizar la etapa de diagnóstico de fallas, se consideran los niveles de los tanques para obtener los residuos que se utilizarán para fines de diagnostico. En esta sección se consideran dos escenarios de falla: a) Bloqueo de la bomba $P_{1,}$ y b) Fuga en el tanque T_2. El estado de las válvulas que se utilizó para realizar el estudio fue: V_{13}, V_{23}, V_{1L} cerradas, las demás válvulas se encuentran totalmente abiertas.

6.2 Operación del sistema bajo condiciones de falla

El primer tipo de fallas simulada es el bloqueo de la bomba P_1, esta sucede al minuto 30. En la Fig. 7 se muestran los residuos obtenidos por el sistema de diagnóstico, se observa que los tres residuos generados son sensibles a la falla, por lo que tenemos una firma de falla $f_1 = [1 \quad 1 \quad 1]$.

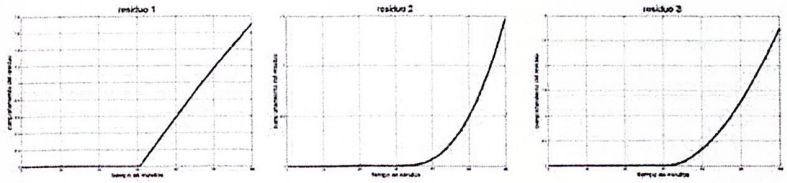


Fig. 7. Residuos para la falla bloqueo de la válvula P_1.

Al igual que en el caso anterior, se simuló un bloqueo de la válvula V12 al minuto 30. Se aprecia en la Fig. 8 que el residuo 2 es insensible a esta falla, esto es debido a que este residuo se genera de acuerdo al nivel del tanque T_2, el cual es llenado mediante la bomba P_2, por lo que su nivel permanecerá en un valor muy cercano al valor en condiciones normales de operación. La firma para esta falla es $f_2 = [1 \quad 0 \quad 1]$.

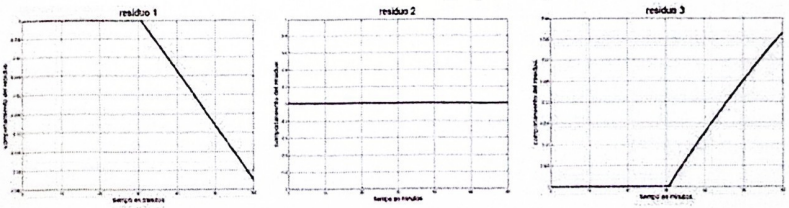


Fig. 8. Residuos obtenidos en la falla bloqueo de la válvula V13

7 Conclusiones

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que el sistema de diagnóstico desarrollado permite la detección e identificación de las fallas consideradas en el diseño. En apariencia, el modelado gráfico por medio de RDP es muy similar a los modelos estructurales, lo cual pudiera permitir el paso a un lenguaje de simulación como las RdP. La inclusión tanto de dinámicas continuas como discretas en una RdPH permite abarcar una variedad mas grande de sistemas dinámicos, comunes en los procesos industriales.

Referencias

1. Pettersson, S., Lennartson, B.: Hybrid modelling focused on hybrid Petri nets. 2nd European workshop on real-time and hybrid systems, Grenoble, France, (1995) pp. 303-309
2. Venkatasubramanian, V.: "Process Fault Detection and Diagnosis: Past, Present and Future". 4th Workshop on On-Line Fault Detection and Supervision in the Chemical Process Industries, Seoul, Korea (2001)
3. Gertler, J.: Fault detection and Diagnosis in Engineering Systems. Marcel Dekker, New York: (1998)
4. Narasimhan, S., Biswas, G.: An Approach to Model-Based Diagnosis of Hybrid Systems. Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC '02). Springer Verlag., Stanford, CA. (2002)
5. David, R., Alla, H.: Continuous Petri Nets. 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Zaragoza, España (1987) 275-294
6. H. Alla: "Les réseaux de Petri: un outil particulièrement adapté à la modélisation des systèmes hybrides, ". Proc. of 2rd Int. Conf. on Automation of Mixed Processes, Brussels, Belgium (1994)
7. Silva, M., Recalde, L.: On fluidification of Petri Nets: from discrete to hybrid and continuous models. Annual Reviews in Control **28** (2004) 253-266
8. Drath, R.: Description of Hybrid Systems by Modified Petri Nets. Lecture Notes in Control and Information Science (LNCIS) **279** (2002) 1-15
9. Le Bail, J., Alla, H., David, R.: Hybrid Petri Nets. Proceedings of the ECC 91, Grenoble, Francia (1991)
10. David, R., Alla, H.: Petri nets and grafcet: tools for modeling discrete event systems. Prentice Hall (1992)
11. Drath, R.: Modeling Hybrid Systems Based on Modified Petri Nets. TU Ilmenau, Ilmenau (1999)
12. Astrom, K.J., Albertos, P., Blanke, M., Isidori, A., Schaufelberger, W.: Three-Tank Control Reconfiguration. Control of Complex Systems. Springer-Verlag, London (2001)

Análisis Estructural para Diagnóstico de Fallas en un Sistema de Inversores en Paralelo

Víctor E. Espinoza Nancy Visairo Víctor Cárdenas *

Centro de Investigación y Estudios de Posgrado, Facultad de Ingenieria, UASLP,
Dr. Manuel Nava 8, 78290, San Luis Potosí, S.L.P.
Teléfono-fax: (52)444-817-3381
victorlopeze@gmail.com,{nvisairoc,vcardena}@uaslp.mx

Resumen. Este artículo presenta el análisis estructural aplicado a un sistema de dos inversores conectados en paralelo. El objetivo de este artículo es mostrar las ventajas que presenta el análisis estructural para determinar la detectabilidad y aislabilidad de un conjunto de fallas en un sistema dinámico. Para esto, se construye el modelo estructural basado en el modelo de espacio de estado de los inversores. A través de la descomposición canónica Dulmage-Mendelsohn de la matriz de incidencia del modelo estructural es posible determinar si existen relaciones redundantes que permitan el diagnóstico de fallas. En este trabajo se consideran fallas en los interruptores y sensores para determinar la posibilidad de reconfiguración. El resultado de este análisis muestra que es posible el aislamiento de todas las fallas consideradas agregando un sensor más a los ya considerados para propósitos de control.

Palabras clave: análisis estructural, sistema de inversores, diagnóstico de fallas.

1. Introducción

Una aplicación de los convertidores de potencia llamados inversores donde se puede requerir una gran cantidad de potencia es en un sistema de Alimentación de Potencia Ininterrumpible (UPS por sus siglas en inglés). Estos equipos han tenido una gran demanda en los últimos años para alimentar cargas críticas (llamadas así por la función que realizan), ya que son capaces de proporcionar una alimentación de muy alta calidad y además, ofrecen respaldos ante cortes en la red eléctrica. Las UPS's están formadas por tres etapas: rectificación, almacenamiento e inversión. Una desventaja que puede presentar la UPS es que cuando la corriente de carga que demanda el sistema crece, la UPS quizás debe ser reemplazada por otra de mayor capacidad. Una solución al problema anterior es conectar varias UPS´s en paralelo para satisfacer los requerimientos de la carga [1]. El nuevo sistema de inversores debe ser seguro y confiable. Los principales

* Los autores agradecen al proyecto P/CA-78-SEP que financió parte de esta investigación.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 43-52

componentes que afectan la confiabilidad son los interruptores y los sensores. Los interruptores son los componentes básicos de un inversor y por lo tanto, son los que afectan en mayor grado la confiabilidad del sistema. También, los sensores son necesarios para realizar un proceso de control satisfactorio ya que una falla en ellos puede provocar que el punto de operación no sea el correcto, en nuestro caso de estudio se desea una senoidal libre de armónicos

En [2], [3] y [5] se presentan esquemas de reconfiguración de inversores considerando sólo fallas en los interruptores. En [2] el diagnóstico de fallas en los interruptores se realiza a través de las señales propias de los dispositivos. En [4] se fija un motor de CA como carga del inversor y el diagnóstico de fallas en sensores se logra analizando el vector de corriente del motor y la frecuencia instantánea.

Así, la falta de un estudio que muestre las propiedades de detectabilidad y aislabilidad necesarias para el desarrollo de algoritmos de diagnóstico de fallas para una posible reconfiguración de un sistema de inversores en paralelo con fallas en los dispositivos críticos (interruptores y sensores) motivó el desarrollo de este trabajo. Para esto, se realiza un análisis estructural considerando el modelo en espacio de estado del sistema de dos inversores sin fijar el tipo de carga.

El principio general de todo esquema de detección y aislamiento de fallas (FDI por sus siglas en inglés) basado en modelos es comparar el comportamiento actual del sistema con su comportamiento en condiciones normales. De aquí, el análisis estructural es un método sencillo pero eficiente que muestra si el sistema tiene suficiente información para hacer un efectivo diagnóstico de fallas. De esta forma, una vez obtenidas las propiedades de FDI del sistema se desarrolla el esquema de diagnóstico de fallas.

El análisis estructural permite evaluar el modelo del sistema con respecto a propiedades de detectabilidad y aislabilidad basándose en herramientas de teoría de grafos. El análisis estructural ha sido también utilizado en algoritmos de reconfigurabilidad para un control tolerante a fallas.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan las bases del análisis estructural. Posteriormente, se explica cómo se utiliza la información estructural para el problema de aislabilidad. En la sección 3 se presenta una breve explicación del sistema de inversores conectados en paralelo controlados con la técnica Maestro-Esclavo. El análisis de aislabilidad para el conjunto de fallas bajo estudio basado en el análisis estructural se presenta en la sección 4. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo en la sección 5.

2. Conceptos básicos del análisis estructural

Un estudio del modelo del sistema a través del análisis estructural permite extraer la información redundante existente en el sistema. El principal objetivo de aplicar un procedimiento estructural es identificar los subsistemas con información redundante para el diagnóstico de fallas.

El modelo estructural de un sistema se representa por un conjunto de restricciones $C = \{c_1, ..., c_n\}$ y un conjunto de variables $Z = K \cup X = \{z_1, ..., z_n\}$ donde X es el conjunto de variables desconocidas (variables de estado, parámetros desconocidos) y K es el conjunto de variables conocidas (mediciones, señales de control, parámetros constantes). El modelo estructural de un sistema se representa mediante un grafo o matriz de incidencia [6].

Considere el modelo,

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), \theta) \ . \tag{1}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), \theta) \ . \tag{2}$$

donde:

$x(t) \in R^n$: estado del sistema
$u(t) \in R^m$: entradas del sistema
$y(t) \in R^p$: salidas del sistema
$\theta \in R^q$: parámetros del sistema

Por tanto, en (1-2) el conjunto de variables y restricciones está dado respectivamente por:

$$Z = x \cup u \cup y \ . \tag{3}$$

$$C = g \cup h \ . \tag{4}$$

donde g representa el conjunto de restricciones diferenciales:

$$\dot{x}(t) - g_i(x(t), u(t), \theta) = 0 \quad i = 1, ..., n \ . \tag{5}$$

y h representa el conjunto de restricciones de medición:

$$y_j(t) - h_j(x(t), u(t), \theta) = 0 \quad j = 1, ..., p \ . \tag{6}$$

Definición 1 *El grafo bipartita asociado con el sistema (3-4) es un grafo con dos conjuntos de nodos C y Z, y aristas entre un vértice $c_i \in C$ y un nodo $z_j \in Z$ si y sólo si la variable z_j aparece en la restricción c_i sin importar si es una restricción diferencial o de medición.*

Un grafo bipartita, puede ser interpretado de la siguiente manera: todas las variables y parámetros conectados con cierto vértice de restricción tiene que satisfacer la representación de la definición de una arista.

Definición 2 *El modelo estructural (o estructura) del sistema (C, Z) es un grafo bipartita (C, Z, ε) donde $\varepsilon \subset C \text{x} Z$ es un conjunto de aristas definido por:*

- $(c_i, z_j) \in \varepsilon$ *si la variable z_j aparece en la restricción c_i.*

Definición 3 *La matriz de incidencia M de un grafo bipartita es una matriz booleana donde las filas corresponden a las restricciones y las columnas a las variables, esto es, $M = \{m_{i,j} | m_{i,j} = 1 \text{si} (c_i, z_j) \in \varepsilon \text{sinom}_{i,j} = 0\}$.*

La herramienta básica para el análisis estructural es el concepto de aparejamiento en un grafo bipartita. De manera sencilla, un aparejamiento es una asignación causal que asocia algunas variables del sistema con las restricciones del sistema a partir de las cuales pueden ser calculadas. Las variables que no pueden ser aparejadas no se pueden calcular. Las variables que pueden ser aparejadas de diferentes formas pueden ser calculadas de diferentes formas (relaciones redundantes ARR's), por tanto, existe la posibilidad del diagnóstico de fallas y la reconfiguración del sistema.

Definición 4 *Un aparejamiento L es un subconjunto de aristas M tal que dos aristas cualesquiera no tienen un nodo (o vértice) en común.*

Teorema 1 (Descomposición Dulmage-Mendelsohn) *Cualquier matriz de incidencia perteneciente a un modelo estructural se descompone en tres partes:*

1. *Sobre-restringido: $S^+ = (C^+, Z^+)$ tal que existe un aparejamiento completo en Z^+ pero no en C, lo que implica la existencia de información redundante en el modelo estructural.*
2. *Justamente-restringido: $S^0 = (C^0, Z^0)$ tal que existe un aparejamiento completo en Z^0 y en C^0.*
3. *Sub-restringido: $S^- = (C^-, Z^-)$ tal que existe un aparejamiento completo en C^- pero no en Z^-.*

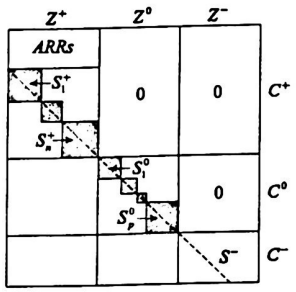


Figura 1. Descomposición canónica Dulmage-Mendelsohn.

Teorema 2 (Observabilidad estructural) *Para que el sistema dado por (3-4) sea estructuralmente observable son suficientes y necesarias las siguientes condiciones:*

1. *Todos los elementos de X son calculables a partir de las variables conocidas.*
2. *Los subconjuntos sobre-restringido y justamente-restringido son causales.*
3. *El subconjunto sub-restringido es vacío.*

2.1. Metodología a seguir para FDI

- Para la aplicación del análisis es tener un modelo del sistema que defina el comportamiento dinámico, así como definir las variables que serán medidas a través de sensores. La selección de dichas mediciones afecta la aislabilidad del sistema.
- Se obtiene el modelo estructural del sistema, para el caso de los inversores se utiliza la matriz de incidencia.
- Posteriormente, con ayuda de los teoremas de Dulmage-Mendelsohn y Observabilidad estructural se realiza la descomposición canónica del sistema y se determina si el sistema es observable estructuralmente, es decir, si se pueden calcular todas las variables desconocidas X a partir de las conocidas K.
- Finalmente, se aplica el concepto de aparejamiento para tener un conjunto de ARRs que permitan evaluar la detectabilidad y aislabilidad de las fallas a través de la firma de fallas de cada una de ellas.

Con lo anterior, el análisis estructural no permite la generación de residuos debido a que no existe un modelo explícito del modelo. Sin embargo, determina el conjunto de restricciones a partir de las cuales se pueden generar los residuos y también provee la secuencia de cálculo.

3. Modelo del sistema de 2 inversores en paralelo

En este trabajo se considera el sistema de 2 inversores conectados en paralelo en configuración Maestro-Esclavo como se muestra en la Figura 2. El inversor Maestro regula el voltaje de salida de tal manera que sea una señal senoidal libre de componentes armónicas para cualquier tipo de carga, otro objetivo del inversor Maestro es proporcionar una parte de la corriente demandada por la carga. Por otro lado, el objetivo del inversor Esclavo se encarga de proporcionar el complemento de la corriente de la carga.

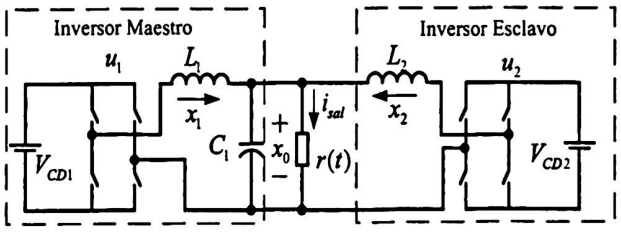


Figura 2. Esquema de la conexión en paralelo de los inversores.

La técnica de control Maestro-Esclavo permite al inversor Esclavo tomar el lugar del Maestro cuando ocurre una falla en dicho inversor y así poder seguir alimentando la carga del sistema de inversores.

Las restricciones que definen el comportamiento dinámico del sistema de 2 inversores están dadas por:

$$-u_1 V_{CD_1} + L_1 \dot{x}_1 + x_0 = 0 \ . \tag{c_1}$$

$$-u_2 V_{CD_2} + L_2 \dot{x}_2 + x_0 = 0 \ . \tag{c_2}$$

$$L_1 \dot{x}_1 - L_2 \dot{x}_2 = u_1 V_{CD_1} - u_2 V_{CD_2} \ . \tag{c_3}$$

$$C_0 \dot{x}_0 + \frac{x_0}{r(t)} = x_1 + x_2 \ . \tag{c_4}$$

donde:

x_0:	Tensión de voltaje en el capacitor
x_1:	Corriente en el inductor L_1
x_2:	Corriente en el inductor L_2
V_{CD_1}, V_{CD_2}:	Tensiones de voltaje de entrada de los inversores
$r(t)$:	Representa una carga dinámica
u_1, u_2:	Señales de control de los inversores
L_1, L_2:	Valores de los inductores
C_0:	Valor del capacitor de salida

4. Análisis estructural del sistema de 2 inversores en paralelo

Para el modelo estructural completo del sistema se definen las restricciones que describen el comportamiento dinámico y los sensores del sistema. Por lo tanto, se agregan las nuevas restricciones:

$$\dot{x}_0 = dx_0 \ . \tag{c_5}$$

$$\dot{x}_1 = dx_1 \ . \tag{c_6}$$

$$\dot{x}_2 = dx_2 \ . \tag{c_7}$$

$$y_0 = x_0 \ . \tag{c_8}$$

$$y_1 = x_1 \ . \tag{c_9}$$

$$y_2 = x_2 \ . \tag{c_{10}}$$

$$y_{sal} = \frac{x_0}{r(t)} \ . \tag{c_{11}}$$

donde:

y_0:	Sensor de la tensión de salida
y_1:	Sensor de la corriente en el inductor L_1
y_2:	Sensor de la corriente en el inductor L_2
y_{sal}:	Sensor de la corriente de la carga

El modelo estructural está definido por el conjunto de restricciones

$$C = \{c_1, ..., c_{11}\} \ .$$

el conjunto de variables conocidas

$$K = \{u_1, u_2, y_0, y_1, y_2, y_{sal}\} \ .$$

el conjunto de variables desconocidas

$$X = \{x_0, x_1, x_2, \dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{x}_2, r(t)\} \ .$$

En la Tabla 1 se muestra la matriz de incidencia del sistema después de haber

Tabla 1. Matriz de incidencia

\	x_0	x_1	x_2	$\dot{x}_0$	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$	$r(t)$
c_8	(1)						
c_9		(1)					
c_{10}			(1)				
c_5	1			(1)			
c_6		1			(1)		
c_7			1			(1)	
c_{11}	1						(1)
c_1	1				1		
c_2	1					1	
c_3					1	1	
c_4	1	1	1	1			1

aplicado la descomposición canónica de Dulmage-Mendelsohn; se puede observar que existen más restricciones que variables, y por lo tanto, es posible aplicar los conceptos de FDI. En particular, se muestra un aparejamiento de tal manera que las restricciones (c_1-c_4) sean las que se utilizan para la generación de las ARRs. Los (1) representan las variables aparejadas, las variables que se calculan a través de las restricciones en las cuales son aparejadas.

La descomposición canónica del modelo estructural de los inversores muestra que los subconjuntos S^0 y S^- son vacíos, por lo tanto, el sistema completo pertenece al subconjunto sobre-restringido S^+, es decir, se pueden calcular todas las variables desconocidas a partir de las conocidas, por lo tanto, el sistema es estructuralmente observable de acuerdo al Teorema 2.

En este trabajo se estudia el siguiente conjunto de fallas:

f_{u_1}: Fallas en los impulsores e interruptores del Inversor Maestro.
f_{u_2}: Fallas en los impulsores e interruptores del Inversor Esclavo.
f_{y_0}: Falla en el sensor de la tensión de salida.
f_{y_1}: Falla en el sensor de corriente del inductor L_1.
f_{y_2}: Falla en el sensor de corriente del inductor L_2.
$f_{y_{sal}}$: Falla en el sensor de corriente de la carga.

4.1. Comentarios acerca de la reconfiguración del sistema

1. Cuando se presentan fallas en impulsores o interruptores el proceso de reconfiguración es sacar de operación al inversor. Por tanto es necesario saber qué inversor presenta la falla y seguir alimentando la carga del sistema.
2. Cuando se presentan fallas en los sensores, el proceso de reconfiguración es no sacar de operación al inversor, se sigue operando al sistema con ayuda de las ARRs.

A continuación se muestran las ARRs que permiten evaluar la detectabilidad y aislabilidad del conjunto de fallas para los casos de reconfiguración mencionados anteriormente.

$$c_1(u_1, c_8(y_0), c_6(c_9(y_1))) \ . \qquad (arr_1)$$

$$c_2(u_2, c_8(y_0), c_7(c_{10}(y_2))) \ . \qquad (arr_2)$$

$$c_3(u_1, u_2, c_6(c_9(y_{12})), c_7(c_{10}(y_2))) \ . \qquad (arr_3)$$

$$c_4(c_8(y_0), c_9(y_1), c_{10}(y_2), c_5(c_8(y_0)), c_{11}(y_3, c_8(y_0))) \ . \qquad (arr_4)$$

En la Tabla 2 se muestra la matriz de firma de fallas con el conjunto de ARRs; se puede observar que la firma de fallas (columnas) son diferentes, es decir, se puede tener detectabilidad y aislabilidad completa con el conjunto de ARRs.

Tabla 2. Matriz de firma de fallas con 4 sensores.

$\setminus$	f_{u_1}	f_{u_2}	f_{y_0}	f_{y_1}	f_{y_2}	$f_{y_{sal}}$
arr_1	1		1	1		
arr_2		1	1		1	
arr_3	1	1		1	1	
arr_4			1	1	1	1

El resultado anterior es cuando se tienen las 4 mediciones disponibles. A continuación se realiza el mismo análisis para cuando la medición del sensor de corriente no se utiliza. Cuando se quita dicho sensor de corriente la confiabilidad del sistema aumenta. Otra característica es conocer la capacidad de reconfiguración del sistema cuando se pierde el sensor, es decir, analizar si el sistema resultante aún tiene la capacidad de diagnóstico y aislamiento; por lo tanto, el conjunto de fallas se reduce a las primeras 5 (f_{u_1}, f_{u_2}, f_{y_0}, f_{y_1}, f_{y_2}), en la Tabla 3 se muestra la nueva matriz de firma de fallas. Se observa que la detectabilidad no se ve afectada, pero es fácil observar que la aislabilidad del sistema sí. Se pueden notar sólo 3 firmas de fallas, y por lo tanto, es posible aislar los 3 conjuntos de fallas: $s_1 = \{f_{u_1}, f_{y_1}\}$, $s_2 = \{f_{u_2}, f_{y_2}\}$ y $s_3 = \{f_{y_0}\}$.

Sin embargo, a pesar de la no aislabilidad de cada falla del sistema cuando se utilizan únicamente 3 sensores es posible determinar qué inversor falla ya que el conjunto $s_1 = \{f_{u_1}, f_{y_1}\}$ corresponde al inversor Maestro y el conjunto

Tabla 3. Matriz de firma de fallas con 3 sensores.

$\backslash$	f_{u_1}	f_{u_2}	f_{u_0}	f_{y_1}	f_{y_2}
arr_1	1		1	1	
arr_2		1	1		1
arr_3	1	1		1	1

$s_2 = \{f_{u_2}, f_{y_2}\}$ pertenece al inversor Esclavo. Por tanto, es posible diseñar un control tolerante a fallas, a fin de seguir alimentando la carga del sistema, a un porcentaje menor de la potencia nominal.

5. Conclusiones

Se presentó de manera detallada un estudio de detectabilidad y aislabilidad de fallas basado en el análisis estructural. Las fallas consideradas son en sensores e interruptores basandose en el modelo de espacio de estado, sin limitar el tipo de carga del sistema. Se muestra que el análisis estructural es una herramienta sencilla pero eficiente para conocer si el sistema presenta redundancias analíticas que sirvan para resolver el problema FDI. Con respecto a las fallas del sistema de Inversores se verifica que se tiene información redundante que ayuda aumentar la confiabilidad del sistema ante presencia de fallas. En el caso de 4 sensores se muestra que existe aislabilidad del conjunto de 6 fallas bajo estudio.

Referencias

1. Pérez, Gustavo: Estudio de Inversores en Conexión Paralela. Tesis de Maestria, UASLP, México (2006)
2. Wu, T.-F., Hsieh, H.-M., Wu, Y.-E., Chen, Y.-K.: Parallel-Inverter System with Failure Isolation and Hot-Swap Features. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 43, No. 5, pp. 1329–1340 (September/October 2007)
3. Mingyao, M., F., Hu, L., Chen, A., He, X.: Reconfiguration of Carrier-Based Modulation Strategy for Fault Tolerant Multilevel Inverters. IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 22, No. 5, pp. 2050–2060 (September 2007)
4. Peuget, R., Courtine, S., Rognon, J.-P.: Fault Detection and Isolation on a PWM Inverter by Knowledge-Based Model. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 34, No. 6, pp. 1318–1326 (November/December 1998)
5. Li, S., Xu, L.: Strategies of Fault Tolerant Operation for Three-Level PWM Inverters. IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 21, No. 4, pp. 933–940 (July 2006)
6. Blanke, M., Lunze, J., *et al*: Diagnosis and Fault-Tolerant Control. Springer, Berlin (2003)
7. Düstegör, D., *et al*: Structural Analysis of Fault Isolability in the DAMADICS Benchmark. Control Enguineering Practice, 14(6), pp. 597-608 (2006)
8. Rattfält, L.: A Comparative Study of Two Structural Methods for Fault Isolability. Masther's Thesis, Deparment of Electrical Engineering at Linköpings Universitet, Germany (2004)

9. Cassar, J. P,. Staroswiecki, M.: A structural Approach for the Design of Failure Detection and Identification Systems. Proc. of the IFAC Symposium on Control of Industrial Systems, Belfort (1997)
10. Rashid, M.: Power Electronics Handbook. Academic Press, USA (2001)

Diagnóstico de Fallas de Interruptor Abierto en Inversores PWM para Variadores de Velocidad

D. R. Espinoza-Trejo, D. U. Campos-Delgado y S. Martínez-Regil

CIEP, Facultad de Ingeniería, UASLP
Facultad de Ciencias, UASLP
C.P. 78290, San Luis Potosí, S.L.P.
espinoza_trejo_dr@uaslp.mx, ducd@fciencias.uaslp.mx

Resumen *En este artículo, se propone un algoritmo de diagnóstico de fallas de actuador para variadores de velocidad de motores de inducción. Este algoritmo permite detectar y aislar fallas de circuito abierto en los interruptores de potencia del inversor. Para la generación de las señales de residuo se emplea un banco de observadores, y la síntesis de éstos se realiza en el marco de referencia de estator. Por otro lado, debido a que sólo existen dos actuadores en este marco de referencia virtual, entonces, se proponen residuos direccionales para lograr la identificación de las fallas presentes en los ejes originales abc. Finalmente, para validar la filosofía de diagnóstico propuesta en este artículo, se muestran resultados en simulación y experimentales considerando fallas concurrentes dentro del inversor.*

1. INTRODUCCIÓN.

El objetivo principal de este artículo es el desarrollo de un esquema de diagnóstico (FDI) para actuadores de potencia de motores de inducción (MI). El estudio se centra en el diagnóstico de fallas de interruptor abierto en inversores trifásicos (Convertidores CD-CA). Dentro de la literatura, distintos enfoques han sido reportados con este mismo propósito: [2], [4] y [11]. En [4], para diagnosticar fallas de interruptor abierto en inversores PWM, se usa un enfoque basado en el reconocimiento de patrones aplicado al vector de corrientes de estator, el cual es obtenido usando la transformación de concordia. La implementación del algoritmo se basa sólo en la información de las corrientes de línea. Por otra parte, en [2] se propone una red neuronal para detectar y aislar una condición de falla de interruptor abierto. La red debe ser entrenada en cada punto de operación deseado ( ) para obtener un desempeño aceptable. Debido a las condiciones de balance en el sistema trifásico, sólo dos sensores de voltaje, dos sensores de corriente y la información del torque eléctrico son usados como entradas a la red neuronal. En [11], se investigan algunas técnicas para el diagnóstico de fallas en inversores PWM. En éste trabajo se considera que sólo una falla de interruptor abierto puede ocurrir al mismo tiempo. Tomando algunas mediciones de voltaje en puntos clave del inversor, las señales de residuo pueden ser obtenidas por

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 53-62

una comparación directa de los voltajes medidos con los voltajes de referencia obtenidos con las señales de referencia PWM. Sin embargo, a pesar de todos estos esfuerzos, algunos aspectos prácticos del diagnóstico no han sido abordados. En este contexto, el esquema FDI propuesto en este artículo mejora los esquemas previos en los siguientes puntos:

- El algoritmo FDI es independiente del torque de carga T_L;
- Fallas simultáneas pueden ser aisladas;
- La detección de las fallas puede ser lograda en una manera cuantitativa y con una respuesta relativamente rápida;
- El aislamiento de las fallas puede ser logrado en un tiempo menor a 3 ciclos de red;
- Sólo 3 mediciones son requeridas para la implementación del algoritmo FDI.

El algoritmo FDI propuesto asume que se tienen disponibles los parámetros característicos del MI. Ésto es factible si se tiene un variador de velocidad (VV) acoplado al MI operando bajo un esquema de control retroalimentado, debido a que previamente se debió haber realizado una identificación de los parámetros del motor con propósitos de control. Sin embargo, es importante resaltar que la falta de precisión en la estimación de estos parámetros podría afectar el desempeño de los residuos, lo cual sería la principal desventaja de este enfoque. Por otro lado, no se requieren nuevas mediciones dentro del sistema, y sólo se utilizan las que emplea el mismo algoritmo de control.

La organización del resto del artículo se presenta a continuación. En la Sec. 2, se describe el modelo matemático del MI en el marco de referencia de estator. El banco de observadores usado para la generación de las señales de residuos se muestra en la Sec. 3. Además, se ilustra la técnica sugerida para la evaluación de éstos. La Sec. 4 presenta resultados de simulación y experimentales obtenidos con el esquema FDI propuesto. Finalmente, en la Sec. 5 se concluye con comentarios finales.

2. MODELO MATEMÁTICO DEL MI

En esta sección, se presenta el modelo matemático del MI en el marco de referencia de estator (d, q) [9]. En éste marco se estudia el efecto de las fallas del actuador de potencia. De acuerdo con [3], este tipo de fallas pueden ser modeladas por una estructura aditiva: $u_d^f(t) = u_d(t) + f_{ud}(t)$, donde $u_d^f(t)$ representa la señal de control actual, $u_d(t)$ la señal de control nominal y $f_{ud}(t)$ el cambio inducido por la falla en el actuador u_d. De igual forma se modela el efecto de la falla en el actuador u_q [ver Ec. (1)]. Asumiendo que la conexión del neutro del motor no se encuentra disponible en la aplicación, entonces, el modelo obtenido es descrito por dos corrientes de estator (i_{ds}, i_{qs}), dos flujos de rotor $(\lambda_{dr}, \lambda_{qr})$ y la velocidad mecánica ω_m como se muestra en la Ec. (1):

$$\dot{x}_1 = -\gamma x_1 + \alpha\beta x_3 + n_p\beta x_4 x_5 + \delta[u_d + f_{ud}]$$
$$\dot{x}_2 = -\gamma x_2 + \alpha\beta x_4 - n_p\beta x_3 x_5 + \delta[u_q + f_{uq}]$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= -\alpha x_3 + \alpha L_m x_1 - n_p x_4 x_5 \\ \dot{x}_4 &= -\alpha x_4 + \alpha L_m x_2 + n_p x_3 x_5 \\ \dot{x}_5 &= -\kappa f x_5 + \mu(x_2 x_3 - x_1 x_4) - \kappa T_L\end{aligned} \tag{1}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (i_{ds}, i_{qs}, \lambda_{dr}, \lambda_{qr}, \omega_m)^T$. Además, $\alpha = R_r/L_r$, $\beta = L_m/\sigma L_s L_r$, $\gamma = (L_m^2 R_r/\sigma L_s L_r^2) + (R_s/\sigma L_s)$, $\mu = 3n_p L_m/2JL_r$, $\delta = 1/\sigma L_s$, $\kappa = 1/J$ y $\sigma = 1 - (L_m^2/L_s L_r)$, son una reparametrización del modelo del motor de inducción, donde α, β, γ, μ, δ, κ y σ son parámetros conocidos, los cuales, dependen de la resistencia de estator R_s, la resistencia de rotor R_r, la inductancia propia de estator L_s, la inductancia propia de rotor L_r, la inductancia mutua L_m, el coeficiente de fricción mecánico f y el momento de inercia J. Por lo que, en la Ec. (1) se considera a $(u_d, u_q)^T$ como el vector de entradas nominales en el sistema, y a la entrada T_L como el par de carga.

Finalmente, notar que en estas coordenadas (d, q), sólo 2 fallas de actuador se presentan (f_{ud}, f_{uq}). Sin embargo, en las coordenadas originales pueden ocurrir hasta 3 fallas, las cuales se relacionan con cada una de las ramas del inversor trifásico. De esta manera, es necesario realizar un post-procesamiento de las señales de residuo resultantes, con el propósito de aislar cada uno de los casos de falla en el actuador de potencia.

3. FDI EN INVERSORES TRIFÁSICOS

Ahora, en esta sección se presenta brevemente la generación y la evaluación de las señales de residuo. La etapa de síntesis se basa en un análisis FDI geométrico que ha sido realizado previamente para la obtención de un banco de observadores [6], donde las fallas consideradas son f_{ud} y f_{uq}, las cuales representan falla de actuador eje- y falla de actuador eje- , respectivamente. Los conjuntos de fallas estudiados con este enfoque se muestran en la Tabla 1. En el modelo analizado, se asumen tres mediciones $(i_{ds}, i_{qs}, \omega_m)$, dos fallas (f_{ud}, f_{uq}) y una perturbación desconocida T_L. De acuerdo con el análisis geométrico [5], se obtiene que $PFGR_1$

Cuadro 1. Conjuntos de fallas de actuador estudiados.

FPRG	Falla	Perturbaciones
$PFGR_1$	f_{ud}	f_{uq}, T_L
$PFGR_2$	f_{uq}	f_{ud}, T_L

y $PFGR_2$ tienen solución, lo cual implica que existe un cambio de coordenadas en el espacio de estados, y otro en el espacio de salidas, tal que éstos permiten obtener un sub-sistema sensible a la falla f_{ud} y desacoplado de las entradas (f_{uq}, T_L), y otro sensible a la falla f_{uq} y desacoplado de las entradas (f_{ud}, T_L).

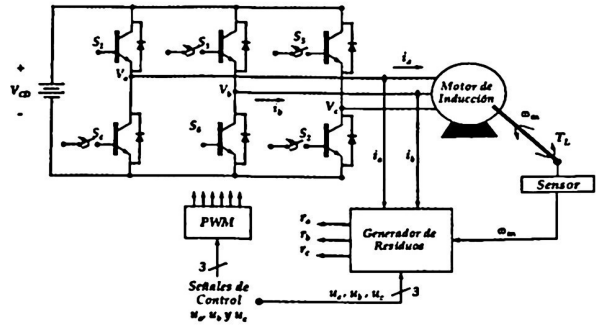


Figura 1. Sistema Inversor Trifásico-Motor de Inducción.

3.1. Solución para $PFGR_1$

Por brevedad, sólo se muestra el sub-sistema obtenido para $PFGR_1$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\gamma x_1 + \alpha\beta x_3 + n_p\beta x_4 y_3 + \delta u_d + \delta f_{ud} \\
\dot{x}_3 &= -\alpha x_3 + \alpha L_m x_1 - n_p x_4 y_3 \\
\dot{x}_4 &= -\alpha x_4 + \alpha L_m y_2 + n_p x_3 y_3 \\
y_1 &= x_1
\end{aligned} \tag{2}$$

el cual, sólo es sensible a la falla f_{ud}, y además, la no-linealidad de éste satisface la condición de Lipschitz , al asumir un rango de operación limitado para el motor de inducción. Para evitar confusiones, los sub-sistemas son representados en las coordenadas originales descritas por el sistema mostrado en la Ec. (1). Por último, se propone un observador del tipo Luenberger para este subsistema, y así se obtiene un generador de residuo para detectar la falla f_{ud}. La estructura dinámica de este observador está dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= -\gamma\hat{x}_1 + \alpha\beta\hat{x}_3 + n_p\beta\hat{x}_4 y_3 + \delta u_d + k_{11}(y_1 - \hat{y}_1) \\
\dot{\hat{x}}_3 &= -\alpha\hat{x}_3 + \alpha L_m\hat{x}_1 - n_p\hat{x}_4 y_3 + k_{12}(y_1 - \hat{y}_1) \\
\dot{\hat{x}}_4 &= -\alpha\hat{x}_4 + \alpha L_m y_2 + n_p\hat{x}_3 y_3 + k_{13}(y_1 - \hat{y}_1) \\
\hat{y}_1 &= \hat{x}_1
\end{aligned} \tag{3}$$

y la señal de residuo se calcularía por la siguiente expresión:

$$r_d(t) = y_1 - \hat{y}_1. \tag{4}$$

Las ganancias de corrección (k_{11}, k_{12}, k_{13}) en (3) pueden obtenerse para garantizar la convergencia del error en condiciones nominales, al evaluar la constante de Lipschitz según los algoritmos descritos en [1],[10].

3.2. Solución para $PFGR_2$

Para el caso $PFGR_2$, el observador para el sub-sistema resultante está dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_2 &= -\gamma\hat{x}_2 + \alpha\beta\hat{x}_4 - n_p\beta\hat{x}_3 y_3 + \delta u_q + k_{21}(y_2 - \hat{y}_2) \\
\dot{\hat{x}}_3 &= -\alpha\hat{x}_3 + \alpha L_m y_1 - n_p\hat{x}_4 y_3 + k_{22}(y_2 - \hat{y}_2) \\
\dot{\hat{x}}_4 &= -\alpha\hat{x}_4 + \alpha L_m\hat{x}_2 + n_p\hat{x}_3 y_3 + k_{23}(y_2 - \hat{y}_2) \\
\hat{y}_2 &= \hat{x}_2
\end{aligned} \tag{5}$$

y la señal de residuo se obtiene a partir de:

$$r_q(t) = y_2 - \hat{y}_2. \tag{6}$$

Notar que el campo no-lineal sigue cumpliendo la condición de Lipschitz de manera local. Por lo tanto, las ganancias (k_{21}, k_{22}, k_{23}) pueden derivarse a partir de las condiciones de convergencia planteadas en [1],[10].

3.3. Etapa de Evaluación y Aislamiento

En esta sección, se deriva la evaluación de los residuos *dq* en (4) y (6) con el propósito de lograr un aislamiento de las fallas del inversor PWM. Este paso es necesario debido a que las fallas del convertidor aparecen en el marco de referencia *abc* (ver Fig. 1), y la detección y el aislamiento han sido realizados en el marco de referencia *dq*. En el marco *abc*, hay tres posibles fallas relacionadas a cada una de las ramas del inversor, pero sólo se construyen dos residuos (r_d, r_q). Por lo tanto, los residuos (r_d, r_q) han adquirido ,
de acuerdo a cada interruptor en el puente inversor. Si dentro de la operación del inversor ocurre una falla de interruptor abierto, entonces ésta obstruye el flujo de corriente por alguna de las fases del motor [4], ya sea el semiciclo positivo o negativo, y se observaría en consecuencia un voltaje de alimentación desequilibrado. En el caso de un falla en el interruptor superior, se limita ahora el flujo en la dirección positiva de esa fase del motor; y en el caso del interruptor inferior, se limitaría la dirección negativa. De esta manera, la polaridad del error instantáneo en la estimación de las corrientes será de utilidad para aislar el interruptor con falla.

En este trabajo, se propone usar la relación entre los ejes *dq* y *abc* [9] para lograr el aislamiento de las fallas en el marco *abc*:

$$x_{qd} = [\Lambda]\, x_{abc} \tag{7}$$

donde $x_{qd} = [x_q, x_d]^T$, $x_{abc} = [x_a, x_b, x_c]^T$ y

$$[\Lambda] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Definir ahora la dirección unitaria de los actuadores en el marco de referencia *abc* como $e_a = (1,0,0)^T$, $e_b = (0,1,0)^T$ y $e_c = (0,0,1)^T$. Entonces, las direcciones resultantes en el marco *dq* son dadas por:

$$v_a = \frac{[\Lambda]\, e_a}{\|[\Lambda]\, e_a\|} \quad ; \quad v_b = \frac{[\Lambda]\, e_b}{\|[\Lambda]\, e_b\|} \quad ; \quad v_c = \frac{[\Lambda]\, e_c}{\|[\Lambda]\, e_c\|} \tag{8}$$

Por lo tanto, (v_a, v_b, v_c) son vectores unitarios relacionados a las direcciones de las fallas de actuador en los ejes *abc* en el marco *dq*. Se sugiere entonces evaluar la contribución del residuo en esas direcciones tomando el producto-interno de vectores [7]:

$$r_a = \langle v_a, r_{qd} \rangle \quad ; \quad r_b = \langle v_b, r_{qd} \rangle \quad ; \quad r_c = \langle v_c, r_{qd} \rangle \tag{9}$$

donde $r_{qd} = (r_q, r_d)^T$ denota el vector residuo formado por la Ec. (6) y la Ec. (4). De esta manera, los residuos (r_a, r_b, r_c) cuantifican la magnitud de la falla y direccionalidad con respecto a los ejes *abc*. Notar que, en la Ec. (9), se omite el valor absoluto, debido a que la dirección de incremento proporcionará la información necesaria para el aislamiento. Finalmente, es importante resaltar que el análisis FDI geométrico sólo garantiza la condición de desacoplo para las direcciones de los actuadores (u_d, u_q). Pero debido a que existen 6 fallas en el sistema real, los residuos mostrados en la Ec. (9) podría no presentar un desacoplo perfecto entre los posibles escenarios de falla. De cualquier manera, se espera obtener una propiedad aceptable de separabilidad, debido a que los vectores (v_a, v_b, v_c) están distanciados 120° uno del otro en el plano *dq* [9].

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección, se presentan resultados de simulación y experimentales, los cuales permiten validar las ideas presentadas en este artículo. Las simulaciones han sido obtenidas con el programa MATLAB/SimPower Systems©, y se considera el siguiente escenario de falla en el (ver Fig. 1):

Caso A : fallas simultáneas de interruptor abierto ocurren en la rama *c* sobre el interruptor (S_5), y en la rama *a* sobre el interruptor (S_4) del inversor trifásico en $t = 0.3s$.

Por otro lado, se realiza la evaluación experimental con un MI de 1 H.P. (Baldor) y el siguiente escenario de falla:

Caso B : fallas simultáneas de interruptor abierto ocurren en la rama *b* sobre el interruptor (S_3), y en la rama *c* sobre el interruptor (S_2) del inversor trifásico en $t = 3.166s$.

Para el escenario de simulación **Caso A**, se considera un par de carga inicial $T_L = 8N.m.$ (66% a velocidad nominal), y en $t = 0.225s$ se presenta un escalón de carga $T_L = 11N.m.$ (92% a velocidad nominal). La potencia y velocidad

base del MI son 3 y 1750 , respectivamente; y el número de par de polos $n_p = 2$. El voltaje nominal de linea es 220 V_{rms} y la frecuencia nominal es 60 . La Tabla 2 muestra los parámetros del motor de inducción usados durante la simulación. El inversor PWM está operando a una frecuencia de conmutación de 10 kHz. Los resultados para el Caso **A** son ilustrados en las

Cuadro 2. Parámetros del Motor Inducción

Parámetro	Valor (Simulación)	Valor (Experimento)
R_s	7.73 Ω	11.4045 Ω
R_r	2.79 Ω	6.5597 Ω
L_s	0.113 H	0.7917 H
L_r	0.112 H	0.7709 H
L_m	0.100 H	0.7556 H
J	0.015 $kg - m^2$	0.0084 $kg - m^2$
f	0.002 $N.m/(rad/sec)$	1.3 $\times 10^{-5}$ $N.m/(rad/sec)$

Figs. (2) y (3). Primero, se observa después del cambio de carga en $t = 0.225s$, un incremento en las corrientes de línea. Sin embargo, notar que los residuos no fueron afectados por este cambio de la perturbación. Luego, las fallas de

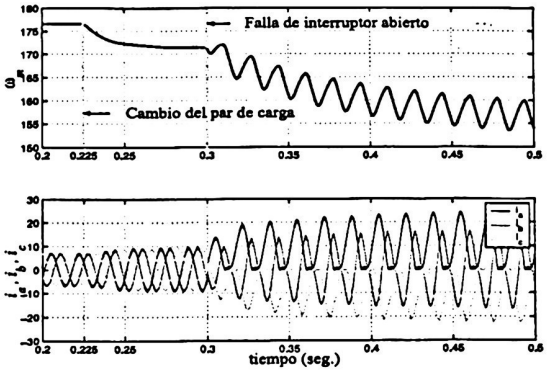


Figura 2. Resultados de Simulación **Caso A**: **(superior)** velocidad angular ω (rad/s), **(inferior)** corrientes de estator i_{abc} (Amps.).

interruptor abierto ocurren en las ramas a y c, y los residuos r_a y r_c enseguida indican la presencia de éstas. Además, después de que ocurren las fallas (ver. Fig. 2), la velocidad mecánica ω presenta una oscilación debido a la asimetría en la entrada de alimentación, la corriente i_a fluye sólo en dirección positiva, y la

corriente i_c en dirección negativa. Como se esperaba, el residuo r_b es diferente de cero, pero su magnitud es significativamente menor que r_a y r_c lo que permite detectar exactamente las fallas. Ésto se debe a que las fallas no son reconstruidas por los residuos. Como resultado, se ubica un umbral $th_H = 6$ para la evaluación de residuos, y así evitar falsas alarmas. Sin embargo, este umbral sería fijo para posteriores evaluaciones. Durante el escenario experimental **Caso B**, se presenta

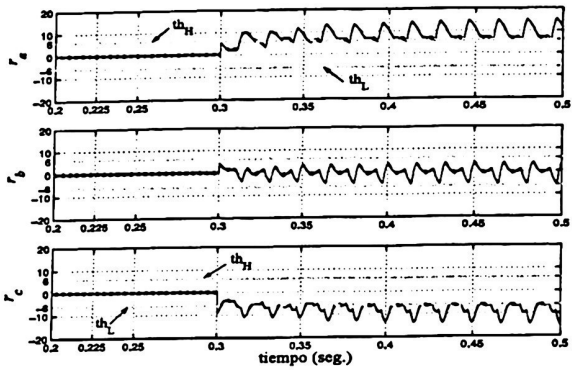


Figura 3. Resultados de Simulación **Caso A**: Residuos, **(superior)**, fase *a*, **(en medio)** fase *b*, **(inferior)** fase *c*.

un escalón de carga en $t = 1.3s$. La potencia y velocidad base del MI son 1 y 1750 , respectivamente; y el número de par de polos $n_p = 2$. El voltaje nominal de linea es 220 V_{rms} y la frecuencia nominal es 60 . Los parámetros del motor de inducción fueron identificados experimentalmente mediante un escalón de voltaje, y se muestran en la tabla 2. El inversor PWM opera a una frecuencia de conmutación de 10 kHz. Ahora, las Figs. (4), (5) y (6) presentan los resultados para el Caso **B**. Similar al Caso **A**, se observa después del escalón de carga en $t = 1.3s$ un incremento en las corrientes de línea (ver Fig. 4). Sin embargo, los residuos no fueron afectados por el cambio en la perturbación (ver Fig. 6). Luego, después de las fallas de interruptor abierto en las ramas *b* y *c*, los residuos r_b y r_c rápidamente muestran la presencia de estas fallas. El incremento en r_b es negativo, y positivo en r_c. Este efecto es debido a las fallas en los interruptores inferior y superior, el cual es consistente con el **Caso A**. Como resultado, ahora la corriente i_c es limitada a fluir en la dirección positiva, y i_b sólo en la dirección negativa [ver Fig. (5)]. El umbral calculado $th_L = 1.25$ fue elegido para la evaluación de los residuos. En conclusión, si el residuo cruza el umbral en la dirección positiva, entonces, se detecta una falla en el interruptor inferior, y si ahora el residuo cruza el umbral negativo se identifica una falla en el interruptor superior. Así, el esquema de diagnóstico basado en modelos propuesto en este trabajo, detecta y aísla las 6 fallas de actuador en el inversor de potencia del

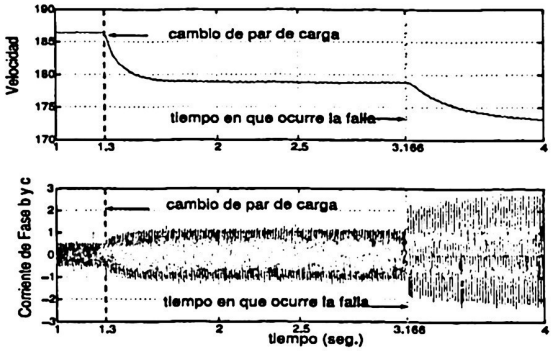


Figura 4. Resultados Experimentales **Caso B**: (**superior**) velocidad angular ω (rad/s), (**inferior**) corrientes de estator (Amps.).

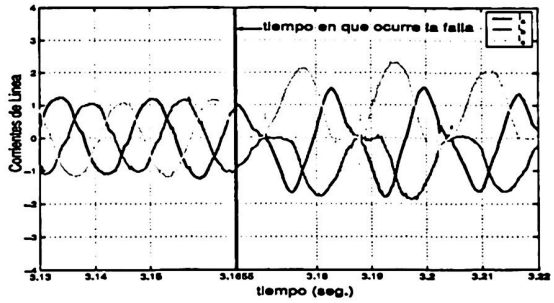


Figura 5. Resultados Experimentales **Caso B**: corrientes de estator (Amps.).

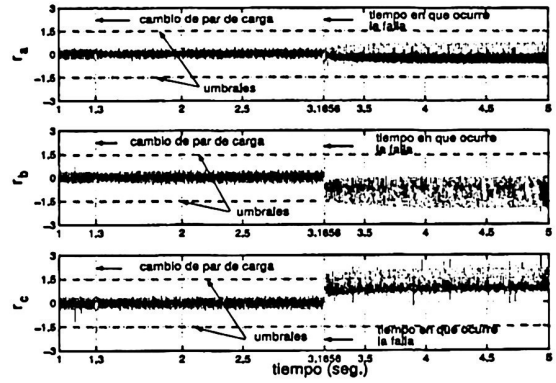


Figura 6. Resultados Experimentales **Caso B**: Residuos, (**superior**), fase *a*, (**en medio**) fase *b*, (**inferior**) fase *c*.

motor de inducción. En ambos casos (**A** y **B**) las ganancias de los observadores en la Ec. (3) y en la Ec. (5) fueron calculadas usando las matrices resultantes (A, C) y el comando *lqr* de MATLAB. Notar que, para la implementación de los observadores (3) y (5), son sólo necesarias tres mediciones i_a, i_b, ω_m debido a la condición de balance en el motor $[i_c = -(i_a + i_b)]$ y las señales moduladoras del control (u_a, u_b, u_c) en el actuador.

5. CONCLUSIONES

En este artículo, se ha presentado una filosofía de diagnóstico de fallas para detectar y asilar fallas de interruptor abierto en inversores PWM alimentado un MI. El esquema propuesto, sólo requiere 3 mediciones para su implementación (i_a, i_b, ω_m) y considera regímenes de operación a velocidad variable y par de carga ( ) arbitrario. Con este enfoque, se pueden lograr tiempos de detección casi instantáneos, y tiempos para el aislamiento de fallas menores a 3 ciclos de red.

Referencias

1. C. Aboky, G. Sallet and J. C. Vivalda, Observers for Lipschitz Non-linear Systems, *Int. J. Control*, vol. 75, No. 3, 2002, pp 204-212.
2. M. Abul Masrur, Z. Chen, B. Zhang y Yi Lu Murphey, Model-Based Fault Diagnosis in Electric Drive Inverters Using Artificial Neural Network, *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, Junio 2007.
3. D. U. Campos Delgado, D. R. Espinoza-Trejo y E. Palacios, Fault-tolerant control in variable speed drives: a survey, *IET Electric Power Applications*, vol. 2, No. 2, 2008, pp 121-134.
4. D. Diallo y M. Hachemi Benbouzid, D. Hamad y X. Pierre, Fault Detection and Diagnosis in an Induction Machine Drive: A Pattern Recognition Approach Based on Concordia Stator Mean Current Vector, *IEEE Trans. on Energy Conversion*, vol. 20, No. 3, Septiembre 2005, pp 512-519.
5. C. De Persis and A. Isidori, A Geometric Approach to Nonlinear Fault Detection and Isolation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 46, No. 6, 2001, pp 853-865.
6. D. R. Espinoza-Trejo y D. U. Campos-Delgado, Actuator Faults Diagnosis for a Class of Nonlinear Systems Applied to Electric Motor Drives, *American Control Conference*, ACC 2008, Seattle, Washington, USA Junio 2008.
7. R. Isermann, *Fault-Diagnosis Systems*, Springer (2006).
8. A. Isidori, A. Krener, C. Gori-Giorgi and S. Monaco, Nonlinear Decoupling via Feedback: A Differential Geometric Approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-26, No. 2, 1981, pp 331-345.
9. R. Krishnan, *Electric Motor Drives*, Prentice Hall (2001).
10. R. Rajamani, Observers for Lipschitz Nonlinear Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 43, No. 3, 1998, pp 397-401.
11. R. Lúcio de Araujo Ribeiro, C. Brandão Jacobina, E. R. Cabral da Silva y A. M. Nogueira Lima, Fault Detection of Open-Switch Damage in Voltage-Fed PWM Motor Drive Systems, *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 18, No. 2, 2003, pp 587-593.

Estimación e Identificación

Identificación y Control Adaptable aplicados a un Motor de Corriente Directa

William Torres Hernández[1], Rosalío Farfán Martínez[1], José A. Ruz Hernández[2], José L. Rullán Lara[2], Ramón García Hernández[2], Dionisio A. Suárez Cerda[3]

[1]Universidad Tecnológica de Campeche, Carretera Federal 180 S/N, San Antonio Cárdenas, C.P. 24381, Cd. del Carmen, Campeche, MÉXICO.
{wtorres, rfarfan}@utcam.edu.mx
[2]Universidad Autónoma del Carmen, Av. 56 #4 X Av. Concordia, Col. Aviación, C.P. 24180, Cd. del Carmen, Campeche, MÉXICO.
{jruz, jrullan, rghernandez}@pampano.unacar.mx
[3]Instituto de Investigaciones Eléctricas, Cuernavaca, Morelos, MÉXICO.
suarez@iie.org.mx

Resúmen. Este trabajo presenta la identificación del modelo de un motor de corriente directa empleando la metodología de mínimos cuadrados ARX. En el modelo identificado se emplea un algoritmo de control adaptable para presentar resultados sobre el control de la velocidad del motor de corriente directa. Se obtienen datos reales de entrada-salida del motor y se calcula el modelo empleando el método de identificación paramétrica de mínimos cuadrados. El modelo obtenido se valida en tiempo real comparando la señal de salida del motor con la del modelo obtenido para una misma señal de entrada. Se diseña un algoritmo de control adaptable indirecto recursivo para realizar el control de la velocidad del motor, estos resultados se presentan a nivel simulación.

Palabras Clave. Control de motores, asignación de polos, control de velocidad, control adaptable, identificación por mínimos cuadrados.

1 Introducción

Los motores de corriente directa se utilizan ampliamente en aplicaciones industriales. No obstante que sus propiedades de operación son accesibles, son bien conocidos los efectos no lineales presentes en la máquina y que se reflejan durante el control de los mismos, particularmente en la región de operación del motor a baja velocidad. Aquí, los efectos de la fricción son los más significativos, además de otras no linealidades típicas como son: histéresis, zona muerta y saturación [1], [2].

Uno de los problemas para la implementación de sistemas de control automático es obtener un modelo que describa la dinámica del sistema a ser controlado. Normalmente este modelo no está disponible o es muy complicado para propósitos de diseño, por ello es importante disponer de un modelo lo suficientemente simple para

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 65-74

trabajar con él, pero que incluya las características esenciales del proceso [3].

La identificación paramétrica, es el método más común de identificación de sistemas dinámicos, está basado en los denominados métodos de minimización del error de predicción, derivados de la tradicional teoría de mínimos cuadrados. La adaptación de esta teoría a la identificación de procesos se basa en aceptar como cierto que el proceso puede representarse por un modelo de estructura fija, generalmente una ecuación lineal en diferencias, lo que implica que dicho modelo tiene naturaleza discreta. La aplicación de este algoritmo puede hacerse fuera de línea o no recursiva, mediante el uso de toda la información disponible de entrada y salida del proceso para determinar un modelo invariante en el tiempo. También, puede hacerse de forma recursiva, de manera que partiendo de una estimación inicial generalmente arbitraria, de los parámetros del modelo, se va actualizando y mejorando con cada nueva información de entrada y salida obtenida, lo que permite obtener una estimación de parámetros variables con el tiempo. Resulta obvio que la identificación recursiva está especialmente concebida para usarse dentro de lo que se conoce en la bibliografía especializada como lazo de control adaptable.

En [4], utilizan el modelo no lineal de un motor de corriente directa con conexión en serie. Comparan sus resultados de simulación en lazo cerrado con resultados en lazo cerrado en tiempo real. Finalmente demuestran que un observador no lineal para la estimación de la velocidad y el par se puede construir basándose solamente en la medición de la corriente del motor. En [5], se realiza una identificación en línea y se diseña el controlador para un motor de corriente directa usando redes neuronales. En este trabajo se toma el problema del modo más general posible preservando la fidelidad del modelo completo, las cargas del motor se modelan en línea y se controlan mediante retropropagación de redes neuronales.

2 Descripción del Equipo

El problema en el motor de corriente directa consiste en controlar la velocidad de giro aplicando un voltaje al devanado de armadura del mismo. En la Figura 1 se aprecia el equipo a utilizar. En los datos de placa del motor se observa que la velocidad nominal es de 3600 rpm y la tensión de alimentación es de 220 Volts.

Se emplea el módulo DL 2637 de la marca de Lorenzo® para poder alimentar al devanado de armadura con un voltaje variable de corriente directa. Este módulo permite con un voltaje entre 0 y 10 volts (señal de control), variar un voltaje de corriente directa entre 0 y 220 volts. Con la finalidad de obtener la forma de la señal de voltaje aplicado a la armadura como señal de entrada a la planta, se utiliza un sensor de voltaje de la marca LEM, modelo LV100-300.

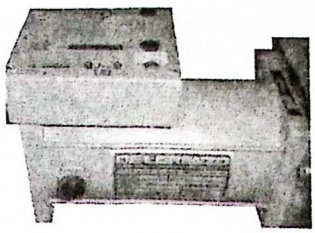


Fig. 1. Motor DL10200A1 de la marca De Lorenzo®.

Para obtener la señal de velocidad (ω) se emplea un módulo de la marca De Lorenzo®, modelo DL 10300PAC. Este módulo proporciona una ganancia de $1mv/min^{-1}$ es decir, para 3600 rpm del motor proporciona 3.6 Volts.

3 Identificación del Modelo del Motor

En esta sección se presenta la metodología empleada para identificar el modelo del motor de corriente directa, se emplea una estructura ARX para lograr este objetivo. A diferencia de los métodos de identificación clásica, los de identificación paramétrica permiten caracterizar de forma más ajustada los modelos, ya que incorporan en su estructura modelos de perturbación.

3.1 Desarrollo de la Identificación del Modelo del Motor

Para la adquisición de datos de la velocidad y voltaje se emplea la DAQ PCI 6071E de National Instruments®. Los sensores de velocidad y voltaje se conectan a las terminales de entrada analógica de la tarjeta de adquisición. Esta tarjeta también cuenta con una terminal de salida analógica que proporciona una señal de voltaje entre 0 y 10 volts, esta señal entra al modulo DL 2637 De Lorenzo®, el cual entrega un voltaje de corriente directa al devanado de armadura del motor entre 0 y 240 volts, de esta manera se puede controlar la velocidad del motor al variar el voltaje de armadura.

Para identificar los parámetros de un sistema, es necesario que la señal de entrada excite todos los modos rápidos y lentos de la planta, de tal forma que ésta pueda responder con información útil a ser procesada por los algoritmos de identificación.

El motor de corriente directa no se puede operar por debajo de un 60% de su velocidad nominal (dato del fabricante). En este trabajo se considera un mínimo del 70%, por lo tanto, la velocidad mínima que se considera es de 2500 rpm para un voltaje de entrada de 150 volts aproximadamente; y la velocidad máxima de 3600 rpm para un voltaje de entrada de 220 volts.

Tomando en cuenta lo anterior se genera la señal de entrada, la cual contiene excitación persistente dentro del rango de operación de este motor. Durante el proceso

de adquisición, se hicieron ocho experimentos de entrada y salida del sistema con el fin de implementarlas en el Toolbox IDENT de Matlab y obtener un modelo con la estructura ARX.

El tiempo de muestreo utilizado en este trabajo es de $0.01\,seg$. Se toma este tiempo teniendo en cuenta que la constante de tiempo del sistema es de $\tau = 0.1849\,seg$. Esta constante de tiempo se obtiene al observar la respuesta del motor ante una entrada escalón. Una regla comúnmente usada consiste en escoger un tiempo de muestreo alrededor de diez veces el ancho de banda del sistema. Esto corresponde aproximadamente a muestrear en torno a cinco u ocho valores del tiempo de subida de la respuesta al escalón del sistema [6]. Por lo tanto, el tiempo de muestreo escogido para este trabajo cumple con este requisito.

Los datos que resultaron con mejor porcentaje de ajuste se muestran en la Figura 2.

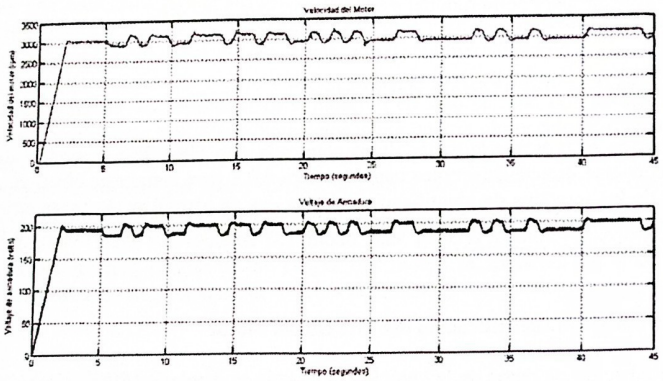


Fig. 2. Datos: arriba.- velocidad del motor; abajo.- voltaje de armadura.

Estos datos proporcionan la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{w(s)}{V(s)} = \frac{98.64s + 8844}{s^2 + 81.43s + 563.2}. \tag{1}$$

donde: $V(s)$ es el voltaje aplicado a la armadura del motor, y $w(s)$ es la velocidad del motor en rpm.

Para validar el proceso de identificación, se sometió el modelo identificado a una prueba en tiempo real trabajando de manera paralela con el motor. Se aplica un voltaje de entrada y con ayuda de Simulink de Matlab se obtienen los resultados que se aprecian en la Figura 3. Como se observa, el modelo identificado responde aproximadamente igual que el motor para una misma señal de voltaje. El error entre ambas señales es de 1.1%.

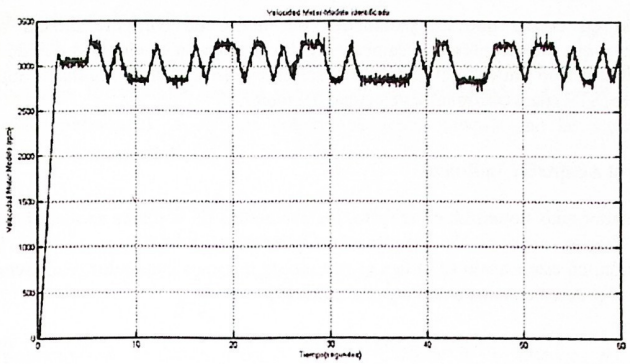


Fig. 3. Velocidad del Motor y del Modelo identificado en revoluciones por minuto.

Para realizar la adquisición de datos en tiempo real en este trabajo, se utiliza la herramienta xPC Target de Matlab. El xPC Target es una aplicación cliente/servidor que permite conectar los modelos creados en Simulink con sistemas físicos, y simularlos en tiempo real [7]. La aplicación se desarrolla en una PC de escritorio (host), con Matlab, Simulink, Real-Time Workshop y un compilador de C instalados. En esta PC se crean los modelos usando bloques de Simulink y se genera el código correspondiente. Posteriormente, este código se ejecuta en tiempo real en una segunda PC (target). Tanto el host como el target no requieren ningún hardware específico, basta con una PC de escritorio [8].

4 Control Adaptable

Un controlador adaptable puede verse como un controlador que puede modificar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del proceso, y puede reducir los efectos de las perturbaciones. De igual forma, puede verse como un controlador con parámetros ajustables y un mecanismo para ajustar estos parámetros.

4.1 Regulador Autosintonizable (STR)

El regulador auto sintonizable (STR) se obtiene mediante un acoplamiento entre el controlador convencional y los parámetros estimados on-line. La operación de este controlador es la siguiente: en cada instante, el estimador envía al controlador los valores estimados, los cuáles son calculados a partir de las medidas de entrada-salida de la planta. El regulador calcula la acción de control correspondiente a esos valores, la cual causa una nueva salida de la planta. El ciclo de adaptación se repite, y así, la acción de control cambia cuando existen cambios en los parámetros de la planta.

Teniendo en cuenta que los parámetros del motor de corriente directa se desconocen y que pueden presentar cambios significativos a baja velocidad debido a las características no lineales del mismo, en este trabajo se diseña un regulador auto sintonizable (STR) para controlar la velocidad del motor.

4.2 Control Adaptable Indirecto

En el regulador auto sintonizable indirecto, los parámetros de la planta se identifican en línea. Varios métodos de identificación pueden utilizarse para realizar la identificación, en este trabajo se utiliza el método de mínimos cuadrados recursivos. Considere el proceso con una entrada y una salida [9]:

$$Ay(t) = Bu(t) + v(t)\,. \tag{2}$$

donde y es la salida del sistema, u es la entrada al sistema y v es una perturbación.

El proceso representado por (2) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} y(t) = &-a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - \ldots - a_n y(t-n) \\ &+ b_0 u(t-d_0) + \ldots + b_m u(t-d_0-m) \end{aligned} \tag{3}$$

El modelo (3) es lineal en los parámetros y puede ser representado de la siguiente manera:

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta\,. \tag{4}$$

donde φ es el vector de regression y θ es el vector que contiene los parámetros:

$$\begin{aligned} \theta^T &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & b_0 & \ldots & b_m \end{bmatrix} \\ \varphi^T(t-1) &= [-y(t-1) \ldots - y(t-n) \\ &\qquad u(t-d_o) \ldots u(t-d_0-m)] \end{aligned} \tag{5}$$

El estimador de mínimos cuadrados con factor de olvido exponencial está dado por:

$$\begin{aligned} &\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t) \\ &\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1) \\ &K(t) = P(t-1)\varphi(t-1)(\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1))^{-1} \\ &P(t) = (I - K(t)\varphi^T(t-1))P(t-1)/\lambda \end{aligned} \tag{6}$$

donde $\varepsilon(t)$ es el error y $P(t)$ es la matriz de covarianzas.

Si la señal de entrada al proceso es capaz de excitarlo de manera persistente y la estructura del modelo estimado es compatible con el proceso, los valores estimados deben converger a los valores reales.

4.3 Ubicación de los Polos de Grado Mínimo

Una vez que se determinan los parámetros del modelo, se proponen los polinomios que contienen la respuesta deseada del sistema en lazo cerrado, A_m y B_m; y un observador polinomial A_0. Estos polinomios deben cumplir con las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} &grado(A_m) = grado(A) \\ &grado(B_m) = grado(B) \\ &grado(A_0) = grado(A) - grado(B^+) - 1 \\ &B_m = B^- B_m^{'} \end{aligned} \tag{7}$$

El polinomio B se factoriza como $B = B^+ B^-$, donde B^+ es mónico. B^+ es un polinomio que contiene todos los ceros estables y bien amortiguados del sistema, estos ceros pueden cancelarse mediante el controlador. B^- corresponde o los ceros inestables o pobremente amortiguados; B^- es un factor de B_m. Posteriormente se encuentran los polinomios R' y S con $grado(S) < grado(A)$ de:

$$AR' + B^- S = A_0 A_m . \tag{8}$$

se forman los polinomios $R = R' B^+$ y $T = A_0 B_m^{'}$ y se calcula la señal de control de:

$$Ru = Tu_c - Sy . \tag{9}$$

donde: u es la señal de control; u_c es la señal de referencia y y es la salida del sistema. Este método a menudo es llamado en la literatura como *ubicación de los polos de grado mínimo* [9]. En el caso particular de diseño en el que se cancelan todos los ceros de la planta:

$$\begin{aligned} &grado(A_0) = grado(A) - grado(B) - 1 \\ &B_m = A_m(1) q^{d_0} \\ &B^- = b_0 \\ &B^+ = B / b_0 \\ &T = A_m(1) q^{d_0} / b_0 \end{aligned} \tag{10}$$

El polinomio característico en lazo cerrado se calcula de la siguiente manera:

$$A_c = B^+ A_c^{'} . \tag{11}$$

La ecuación Diofantina se reduce a:

$$AR'+b_0S=A_c^{'}=A_0A_m\,. \tag{12}$$

4.4 Control Adaptable Indirecto aplicado al Motor de Corriente Directa

Para este trabajo el diseño del controlador se realizó de la siguiente manera: de la identificación recursiva se obtienen los siguientes polinomios que describen la planta en ese instante:

$$\frac{B(q)}{A(q)}=\frac{b_0q+b_1}{q^2+a_1q+a_2}\,. \tag{13}$$

el $grado(A)=2$ y el $grado(B)=1$, los polinomios deseados para la respuesta del sistema en lazo cerrado son:

$$\frac{B_m(q)}{A_m(q)}=\frac{b_{m0}q}{q^2+a_{m1}q+a_{m2}}=\frac{0.0094q}{q^2-1.86q+0.8694}\,. \tag{14}$$

Los polinomios deseados corresponden a un sistema con una frecuencia natural de 5 rad/seg y un factor de amortiguamiento de 0.7. El parámetro b_{m0} se selecciona para que la ganancia estática del sistema sea unitaria. Siguiendo con el procedimiento se factoriza el polinomio B y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} B^{+}(q)&=q+{b_1}/{b_0}\\ B^{-}(q)&=b_0\\ B_m^{'}&={b_{m0}q}/{b_0} \end{aligned} \tag{15}$$

Los polinomios R, S y T son de primer orden; el polinomio R' es de grado cero, es decir, $R'=1$; el grado de B^{+} es uno y el grado de A_0 es cero. Se elige $A_0(q)=1$. La ecuación Diofantina es:

$$(q^2+a_1q+a_2)\cdot 1+b_0(s_0q+s_1)=q^2+a_{m1}q+a_{m2}\,. \tag{16}$$

la solución de esta ecuación es:

$$s_0=\frac{a_{m1}-a_1}{b_0};\quad s_1=\frac{a_{m2}-a_2}{b_0}\,. \tag{17}$$

El controlador es caracterizado por los siguientes polinomios:

$$R(q) = B^{+} = q + {}^{b_1}\!/_{b_0}$$
$$S(q) = s_0 q + s_1 \qquad (18)$$
$$T(q) = A_0 B_m^{'} = {}^{b_{m0} q}\!/_{b_0}$$

Entonces la ley de control se calcula en línea como sigue:

$$u(t) = t_0 u_c(t) - s_0 y(t) - s_1 y(t-1) - r_1 u(t-1)\,. \qquad (19)$$

4.5 Resultados

El algoritmo de control se aplica a nivel simulación al modelo identificado del motor de corriente directa. En la Figura 4 (arriba), se observa el seguimiento de la trayectoria de velocidad por parte de la salida del sistema, presenta unos pequeños sobre impulsos de alrededor del 4%; el seguimiento se logra alrededor de 2 segundos. La señal de referencia utilizada es un tren de pulsos con una amplitud de 3000 rpm. En la Figura 4 (abajo), se presenta la ley de control, que para el caso del motor de corriente directa corresponde al voltaje de armadura, este alcanza en su punto más alto 220 volts, con lo cual se garantiza que el motor trabaja dentro de sus parámetros nominales.

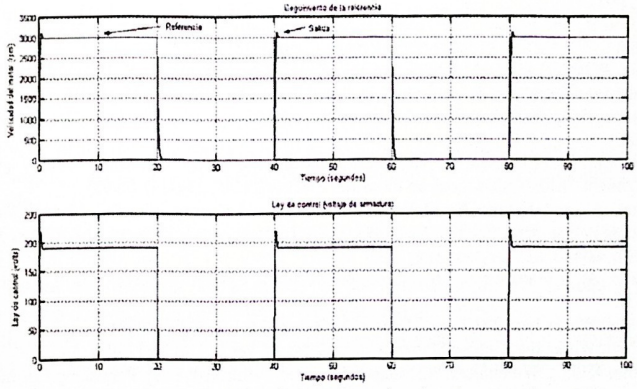


Fig. 4. Seguimiento de la referencia y ley de control.

5 Conclusiones

Se realizó la identificación del modelo de un motor de corriente directa empleando una estructura ARX y la metodología de mínimos cuadrados; este modelo se validó en tiempo real mostrándose la comparación con el motor real. Se diseñó un algoritmo de control adaptable indirecto y se aplicó a nivel simulación al modelo del motor. Como se apreció, los resultados fueron aceptables en cuanto al control de la velocidad del motor, la ley de control se muestra suave y dentro de los límites nominales de la máquina. Como trabajo futuro se propone aplicar el algoritmo de control diseñado en tiempo real.

6 Agradecimientos

Los dos primeros autores agradecen a la Universidad Tecnológica de Campeche por todo el apoyo brindado para realizar este trabajo. El tercero, cuarto y quinto autor agradecen al Promep su apoyo a través del proyecto P/-CA-7 2006 05.

Referencias

1. Tsang, K.M., and Li, G.: Robust Nonlinear Nominal-Model Following Control to Overcome Deadzone Nonlinearities. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 48, 177-184 (2001).
2. Chiasson, J., and Bodson, M.: Technical Notes and Correspondence Nonlinear Control of a Shunt DC. IEEE Transactions on Automatic Control. 38, 935-942 (1993).
3. Garcia, R., Sánchez, E.N., Ruz, J. A., Pacheco, J. G., y Shelomov, E.: Seguimiento de Trayectorias Basado en Regulación Lineal y Control Difuso Takagi-Sugeno Aplicado al Problema de la Bola y la Viga. Memorias de SAAEI, pp. 365-370. Santander, España (2005).
4. Mehta, S., and Chiasson, J.: Nonlinear Control of a Series DC Motor Theory and Experiment. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 45, 134-141 (1998).
5. Rubaai, A., and Kotaru, R.: Online Identification and Control of a DC Motor Using Learning Adaptation of Neural Networks. IEEE Transactions on Industry Aplications, 36, 935-942 (2000).
6. Aguado, A., y Martínez, M.: Identificación y Control Adaptativo. Prentice Hall, España, (2003).
7. The MathWorks Inc. xPC Target, User's Guide, ver. 2.0.1. U.S.A., (2003).
8. The MathWorks Inc. Getting Started with xPC Target, ver. 2. U.S.A., (2003).
9. Aström, K. J., y Wittenmark, B.: Adaptive Control. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., U.S.A., (1995).

Un enfoque algebraico-diferencial para la estimación de las corrientes del rotor en el motor de inducción.

Flor Silva, Carlos García, Alejandro Rodríguez.

Departamento de Control Automático
Cenidet, Interior Internado Palmira s/n, Cuernavaca, Morelos.
e-mail: fsilvac_28@hotmail.com, cdgarcia_mx@yahoo.com, omegarmx@yahoo.com.

Resumen. Este trabajo presenta un observador no lineal basado en la condición de observabilidad algebraica, que se obtiene a través de la estimación algebraica de las derivadas de orden finito de las señales de entrada y salida del sistema. Para manipular las variables del sistema y sus derivadas se usan conceptos de álgebra diferencial. Para ilustrar la metodología de diseño de los observadores algebraicos se estiman las corrientes del rotor en el modelo del motor de inducción jaula de ardilla basado en corrientes y voltajes de estator.

Palabras clave: Estimación de estados, observador algebraico, reconstructor de estado, álgebra diferencial, motor de inducción jaula de ardilla.

1 Introducción

Diseñar un observador no lineal puede resultar una tarea difícil. Desde el punto de vista teórico tales dificultades provienen de: *(i)* singularidades dentro del mapeo de observación; *(ii)* que la propiedad de observabilidad dependa de la entrada; y *(iii)* la necesidad de observadores de orden extendido en los casos donde determinar observabilidad no cumple ante el criterio del rango completo de la matriz. Desde el punto de vista práctico las razones son: *a)* la presencia de perturbaciones y el ruido en las mediciones; y *b)* la falta de precisión en el modelo y en las condiciones iniciales no conocidas.

En este artículo se considera el enfoque algebraico diferencial introducido por Fliess [4], y aplicado en [6], [7] y [8]. Desde esta perspectiva las variables de un sistema se pueden expresar en términos de las entradas, de las salidas y de un conjunto de sus derivadas de orden finito con respecto al tiempo.

La estimación de las derivadas está basada en la serie de Taylor truncada de la señal analítica. Utilizando la derivada algebraica es posible eliminar la influencia de los valores iniciales en la estimación [8]. Dicha estimación se realiza a partir de un filtro lineal, variante en el tiempo junto con una ecuación de salida singular, esto permite que la estimación sea robusta ante perturbaciones y ruido de medición. La estimación de los estados se define en términos de un problema de observación, y se realiza parametrizando los estados en función de las señales conocidas.

La metodología se basa en conceptos de álgebra diferencial, lo que hace posible la manipulación de sistemas polinomiales de ecuaciones diferenciales de manera sistemática. El reconstructor de estados hace uso de un observador no lineal llamado

M.A. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 75-84

observador algebraico, el cual posee una metodología de diseño más sencilla con respecto a los observadores de entradas desconocidas. Para implementarse se requiere que cumpla la condición de observabilidad algebraica. El principal resultado es la estimación de las corrientes del rotor en el motor de inducción tipo Jaula de ardilla.

2 Álgebra Diferencial

El álgebra diferencial es una rama de las matemáticas que utiliza métodos del álgebra abstracta para estudiar las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones ordinarias polinomiales no lineales. Ésta es una generalización del álgebra conmutativa clásica y está basada principalmente en los trabajos de Ritt [9] y Kolchin [5], de donde se citan las siguientes definiciones.

Definición 1. Se dice que un campo conmutativo K de característica cero, es un *campo diferencial* si la operación de derivación está definida en él. Entonces, para cualesquiera dos elementos a y b que pertenecen al campo K, se tiene que:

$$1.\ \frac{d}{dt}(a+b) = (\dot{a}+\dot{b}) \qquad 2.\ \frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + \dot{b}a$$

Se dice que un elemento $c \in K$, donde K es un campo diferencial, es una *constante* si se verifica que $\dot{c} = 0$. El conjunto de las constantes de K es un subcampo de K y se le llama el campo de constantes.

Un campo puede estar incluido en otro campo más grande. A esto, formalmente, se le denomina extensión de campo.

Definición 2. Una *extensión de campo diferencial,* denotada por L/K, donde K y L son campos diferenciales, satisface las condiciones siguientes: i) K es un subcampo de L, $(K \subseteq L)$ y ii) La diferenciación en K es la restricción de la diferenciación de L en K.

Definición 3. Se dice que una *extensión de campos diferenciales* L/K está generada finitamente si existe un subconjunto $S \subset L$ tal que $L = K\langle S\rangle$, es decir, L está generado por el campo diferencial K y los elementos de S.

Ejemplo. $\mathbb{R}\langle e^t\rangle/\mathbb{R}$ es una extensión de campos diferenciales, ya que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}\langle e^t\rangle$.

En la resolución de las ecuaciones polinomiales definidas en un campo es fundamental determinar si sus raíces también pertenecen a dicho campo. Cuando este no es el caso, se necesita el concepto de extensión de campo para poder incluir en este nuevo campo tanto a los coeficientes del polinomio como a sus raíces. Si sucede que los elementos de un campo arbitrario son raíces de alguna ecuación polinomial, entonces se dice que éstos son algebraicos; en caso contrario se les designa como elementos trascendentes. Para el caso diferencial formalmente tenemos las siguientes definiciones:

Definición 4. Se dice que un elemento $\xi \in L$ es *algebraico diferencialmente* sobre K si, y sólo si, satisface una ecuación algebraica diferencial $P(\xi, \dot{\xi}, \ldots, \xi^{(\alpha)}) = 0$ donde P es un polinomio sobre K en la indeterminada ξ y un número finito de sus derivadas. La extensión L/K es algebraica diferencialmente si, y sólo si, cualquier elemento de L es algebraico diferencialmente sobre K.

Se dice que un elemento $a \in L$ es *trascendental diferencialmente* sobre K si, y sólo si, éste no es algebraico diferencialmente sobre K. La extensión L/K es trascendental

diferencialmente si, y sólo si, existe por lo menos un elemento de L que es trascendental diferencialmente sobre K. Que un elemento $a \in L$ sea trascendental diferencialmente sobre K significa que no existe sobre K una ecuación algebraica diferencial para la cual a es una de sus raíces.

3 Condición de Observabilidad Algebraica

El concepto de *observabilidad algebraica* es consecuencia de que la extensión de campo diferencial $G/k\langle u,y\rangle$ sea algebraica, es decir, la información diferencial completa está contenida en $k\langle u,y\rangle$.

Que la extensión de campo diferencial sea algebraica significa que todos los elementos de G son algebraicos sobre el campo $k\langle u,y\rangle$, es decir, toda la información del sistema se puede observar a partir de las entradas y de las salidas del mismo.

Como ejemplo, considere el sistema de control polinomial, no lineal de la forma:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{u})\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u})\end{cases} \tag{1}$$

donde $x(t)=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t)=(u_1,\ldots,u_m)\in\mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y(t)=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{h}$ son funciones polinomiales, respectivamente.

Si las ecuaciones obtenidas mediante diferenciación de las funciones de salida, sólo contienen expresiones polinomiales, esto permite usar una nueva definición de observabilidad basada en la siguiente idea: *la variable de estado x_i, $i=1,\ldots n$ es observable si, y sólo si, existe una relación algebraica que asocie a cada x_i con las entradas, las salidas y un número finito de sus derivadas con respecto al tiempo. Si cada x_i es la solución de una ecuación polinomial en $U=(U^{(0)},U^{(1)},\ldots)$ y en $Y=(Y^{(0)},Y^{(1)},\ldots)$, entonces se sabe que dado un mapeo entrada–salida, éste corresponde localmente a un único estado del sistema* [1]. Como ejemplo, considérese el siguiente sistema que se presenta en [6]:

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)x_2^2(t)u_1(t)\\ \dot{x}_2=x_1(t)u_2(t)\\ \dot{x}_3=x_2(t)\end{cases}\qquad y(t)=x_2 \tag{2}$$

En este caso se tiene un sistema observable, ya que los estados $x_1(t)$ y $x_2(t)$ satisfacen las siguientes ecuaciones polinomiales

$$P_1(x_2)=x_2-y=0,\qquad P_2(x_1)=u_2x_1-\dot{y}=0,\qquad u,y\neq 0 \tag{3}$$

Por lo tanto, los estados $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son observables algebraicamente sobre $\mathbb{R}\langle u,y\rangle$, de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 5 [2]. Para el sistema (1) un estado es observable algebraicamente con respecto a $K\langle u,y\rangle$, si éste es algebraico sobre $K\langle u,y\rangle$. Cualquier dinámica con salida y es observable algebraicamente si, y sólo si, algún estado tiene esta propiedad.

4 Análisis del Modelo del Motor de Inducción con Resistencias Explícitas

En esta sección se presenta el resumen del análisis del modelo del motor de inducción con resistencias explícitas y se determina la condición de observabilidad algebraica [3] para este sistema considerando lo que se mencionó en la sección anterior.

4.1 Características del Motor de Inducción

El modelo del motor de inducción, descrito más adelante por (12), que se considera en este análisis tiene la característica de mantener explícitos los valores de las resistencias de cada uno de los devanados del motor. En notación matricial el modelo del motor de inducción trifásico (subsistema eléctrico), se expresa por

$$V_s^{abc} = R_s^{abc} I_s^{abc} + \frac{d\left(\lambda_s^{abc}\right)}{dt} \qquad V_r^{abc} = R_r^{abc} I_r^{abc} + \frac{d\left(\lambda_r^{abc}\right)}{dt} \tag{4}$$

donde

$$v_s^{abc} = \begin{bmatrix} v_{as} & v_{bs} & v_{cs} \end{bmatrix}^T,\ v_r^{abc} = \begin{bmatrix} v_{ar} & v_{br} & v_{cr} \end{bmatrix}^T,\ I_s^{abc} = \begin{bmatrix} I_{as} & I_{bs} & I_{cs} \end{bmatrix}^T,$$

$$\lambda_s^{abc} = \begin{bmatrix} \lambda_{as} & \lambda_{bs} & \lambda_{cs} \end{bmatrix}^T,\ \lambda_r^{abc} = \begin{bmatrix} \lambda_{ar} & \lambda_{br} & \lambda_{cr} \end{bmatrix}^T,\ I_r^{abc} = \begin{bmatrix} I_{ar} & I_{br} & I_{cr} \end{bmatrix}^T.$$

$$R_s^{abc} = R_s \mathbf{I}_{3x3} \qquad R_r^{abc} = R_r \mathbf{I}_{3x3}$$

Aquí, *a,b,c* son las variables trifásicas; $\lambda_{as}, \lambda_{bs}, \lambda_{cs}$ son los enlaces de flujo trifásicos en el estator; $\lambda_{ar}, \lambda_{br}, \lambda_{cr}$ son los enlaces de flujo trifásicos en el rotor; I_{as}, I_{bs}, I_{cs} son las corrientes trifásicas de estator; I_{ar}, I_{br}, I_{cr} son las corrientes trifásicas de rotor; R_s y R_r son las resistencias de estator y rotor, respectivamente; v_{as}, v_{bs}, v_{cs} son los voltajes de estator y v_{ar}, v_{br}, v_{cr} son los voltajes de rotor, para este caso son cero.

Por medio de la teoría del marco de referencia se realiza un cambio de variables trifásicas (*abc*) a bifásicas (*qd0*) por medio del cual es posible encontrar un modelo del motor de inducción más simple y equivalente al modelo trifásico. La transformación de variables trifásicas a bifásicas se lleva a cabo en el marco de referencia fijo al estator (Transformación de Park) [10]. Este cambio permite eliminar los términos de las inductancias que dependen explícitamente de la posición del rotor.

El modelo del motor de inducción trifásico, descrito por (4), al transformarse en el marco de referencia arbitrario se convierte en

$$K_{qd0}(\theta) v_s^{abc} = K_{qd0}(\theta) R_s^{abc} K_{qd0}^{-1}(\theta) K_{qd0}(\theta) I_s^{abc} + K_{qd0}(\theta) p\left[K_{qd0}^{-1}(\theta) K_{qd0}(\theta) \lambda_s^{abc}\right] \tag{5}$$

$$K_{qd0}(\theta-\theta_r) v_r^{abc} = K_{qd0}(\theta-\theta_r) R_r^{abc} K_{qd0}^{-1}(\theta-\theta_r) K_{qd0}(\theta) I_r^{abc} + K_{qd0}(\theta-\theta_r) p\left[K_{qd0}^{-1}(\theta-\theta_r) K_{qd0}(\theta-\theta_r) \lambda_r^{abc}\right]$$

donde

$$K_{qd0}(\theta) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta-2\pi/3) & \cos(\theta+2\pi/3) \\ sen\theta & sen(\theta-2\pi/3) & sen(\theta+2\pi/3) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

es la matriz de transformación, θ es la posición del marco de referencia, y θ_r es el desplazamiento angular del rotor. Las expresiones en (5), se reducen a

$$v_s^{qd0} = k_{qd0}(\theta) v_s^{abc} = k_{qd0}(\theta) R_s^{abc} k_{qd0}^{-1}(\theta) I_s^{qd0} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_s^{qd0} + p\lambda_s^{qd0} \tag{7}$$

$$v_r^{qd0} = k_{qd0}(\theta-\theta_r) v_r^{abc} = k_{qd0}(\theta-\theta_r) R_r^{abc} k_{qd0}^{-1}(\theta-\theta_r) I_r^{qd0} + (\omega-\omega_r) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_r^{qd0} + p\lambda_r^{qd0} \tag{8}$$

donde V_s^{qd0}, V_r^{qd0} son los vectores de voltajes tanto de estator como de rotor en el marco de referencia; $\lambda_s^{qd0}, \lambda_r^{qd0}$ son los vectores de los enlaces de flujo tanto de estator como de rotor en el marco de referencia; ω es la velocidad del marco de referencia; mientras que ω_r es la velocidad del rotor y p es el operador diferencial d/dt.

Se consideran resistencias desiguales en los devanados de estator y de rotor, con el fin de dejar explícitos los valores de éstas en el modelo del motor [10], así resulta

$$k_{qd0}(\theta) R_s^{abc} k_{qd0}^{-1}(\theta) = k_{qd0}(\theta) \begin{bmatrix} R_{sa} & 0 & 0 \\ 0 & R_{sb} & 0 \\ 0 & 0 & R_{sc} \end{bmatrix} k_{qd0}^{-1}(\theta)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}R_{sa} + \frac{1}{6}R_{sb} + \frac{1}{6}R_{sc} & \frac{\sqrt{3}}{6}(R_{sb} - R_{sc}) & \frac{2}{3}R_{sa} - \frac{1}{3}R_{sb} - \frac{1}{3}R_{sc} \\ \frac{1}{6}(R_{sb} - R_{sc}) & \frac{1}{2}(R_{sb} + R_{sc}) & \frac{\sqrt{3}}{3}(R_{sb} - R_{sc}) \\ \frac{1}{3}R_{sa} - \frac{1}{6}R_{sb} - \frac{1}{6}R_{sc} & -\frac{\sqrt{3}}{6}(R_{sb} - R_{sc}) & \frac{1}{3}(R_{sa} + R_{sb} + R_{sc}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{s11} & R_{s12} & R_{s13} \\ R_{s21} & R_{s22} & R_{s23} \\ R_{s31} & R_{s32} & R_{s33} \end{bmatrix} \tag{9}$$

De la misma manera, se obtiene la matriz de resistencias para el rotor

$$k_{qd0}(\theta) R_r^{abc} k_{qd0}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} R_{r11} & R_{r12} & R_{r13} \\ R_{r21} & R_{r22} & R_{r23} \\ R_{r31} & R_{r32} & R_{r33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Sustituyendo (9) y (10) en (5), se tiene

$$\begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v_{0s} \\ v_{qr} \\ v_{dr} \\ v_{0r} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\omega-\omega_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\omega-\omega_r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & L_r & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{lr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{s11} & R_{s12} & R_{s13} & 0 & 0 & 0 \\ R_{s21} & R_{s22} & R_{s23} & 0 & 0 & 0 \\ R_{s31} & R_{s32} & R_{s33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{r11} & R_{r12} & R_{r13} \\ 0 & 0 & 0 & R_{r21} & R_{r22} & R_{r23} \\ 0 & 0 & 0 & R_{r31} & R_{r32} & R_{r33} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_{qs} \\ I_{ds} \\ I_{0s} \\ I_{qr} \\ I_{dr} \\ I_{0r} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$+ \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & L_r & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{lr} \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} I_{qs} \\ I_{ds} \\ I_{0s} \\ I_{qr} \\ I_{dr} \\ I_{0r} \end{bmatrix}$$

donde v_{qs}, v_{ds}, v_{0s} son los voltajes de los devanados del estator; v_{qr}, v_{dr}, v_{0r} son los voltajes de los devanados del rotor; M es la inductancia mutua entre los devanados de estator y de rotor; I_{qs}, I_{ds}, I_{0s} son las corrientes de los devanados de estator en el marco de referencia; I_{qr}, I_{dr}, I_{0r} son las corrientes de los devanados del rotor en el marco de referencia; L_s y L_r son las inductancias de los devanados de estator y de rotor; L_{ls} y L_{lr} son las inductancias de dispersión de los devanados de estator y rotor.

En notación matricial, (11) se expresa como $V = (WL + R)I + LpI$. Al despejar las corrientes del motor de inducción de la expresión matricial se obtiene $pI = -L^{-1}[LW + R]I + L^{-1}V$.

La suposición de que los circuitos están balanceados permite descartar la secuencia cero. Así, el modelo del motor de inducción en función de las corrientes en el marco de referencia fijo al estator y considerando resistencias desiguales en los devanados del motor se presenta a continuación [10]

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_{qs} &= -\xi(L_r R_{s11})I_{qs} + (-\xi L_r R_{s12} - \xi M^2 np\omega_r)I_{ds} + \xi M R_{r11} I_{qr} + \xi(R_{r12} - np\omega_r L_r)M I_{dr} + \xi L_r v_{qs};\\
\dot{I}_{ds} &= \xi(-L_r R_{s21} + M^2 np\omega_r)I_{qs} - \xi L_r R_{s22} I_{ds} + \xi M(np\omega_r L_r + R_{r21})I_{qr} + \xi M R_{r22} I_{dr} + \xi L_r v_{ds};\\
\dot{I}_{qr} &= \xi M R_{s11} I_{qs} + \xi(R_{s12} + L_s np\omega_r)M I_{ds} - \xi L_s R_{r11} I_{qr} + \xi L_s(np\omega_r L_r - R_{r12})I_{dr} - \xi M v_{qs};\\
\dot{I}_{dr} &= \xi(R_{s21} - L_s np\omega_r)M I_{qs} + \xi M R_{s22} I_{ds} + \xi L_s(-np\omega_r L_r - R_{r21})I_{qr} - \xi L_s R_{r22} I_{dr} - \xi M v_{ds};\\
\dot{\omega}_r &= \frac{3}{2} np \frac{M}{J}(I_{qs} I_{dr} - I_{qr} I_{ds}) - \frac{B\omega_r}{J} - \frac{T_L}{J};
\end{aligned}
\tag{12}
$$

donde R_{slj}, R_{rlj} son las resistencias de estator y rotor respectivamente para i,j=1...3 de acuerdo con las expresiones (9) y (10); $\xi = 1/(L_s L_r - M^2)$; n_p es el número de pares de polos del motor; τ_L es el par de carga; B es el coeficiente de fricción viscosa; J es la inercia total; ω_r es la velocidad mecánica del rotor; $I_{qs}, I_{ds}, I_{qr}, I_{dr}$ son las corrientes de estator y rotor en el marco de referencia; v_{ds}, v_{qs} son los voltajes de alimentación en el marco de referencia. Los estados del sistema son las corrientes del estator, del rotor y la velocidad del rotor. Las salidas medibles son las corrientes del estator (I_{qs} e I_{ds}) y la velocidad ω_r, es decir $y_1 = I_{qs}$, $y_2 = I_{ds}$, $y_3 = \omega_r$.

4.2 Condición de Observabilidad Algebraica para el Motor de Inducción.

Para el caso del modelo del motor de inducción descrito por el sistema (12), se tiene un sistema observable algebraicamente, ya que los estados I_{qs}, I_{ds} y ω_r satisfacen las siguientes ecuaciones

$$P_1(I_{qs}) = I_{qs} - y_1 = 0, \tag{13}$$

$$P_2(I_{ds}) = I_{ds} - y_2 = 0, \tag{14}$$

$$P_3(\omega_r) = \omega_r - y_3 = 0, \quad y_i \neq 0, \quad i = 1,...,3 \tag{15}$$

Los estados I_{qr}, I_{dr} se obtienen de (24) y (25). Por lo tanto, los estados I_{qs}, I_{ds}, I_{qr}, I_{dr} y ω_r son observables algebraicamente sobre $\mathbb{R}\langle u, y\rangle$, y, de acuerdo con la **definición 5**, el sistema del motor de inducción (12) es observable algebraicamente.

5 Estimación Algebraica de las Derivadas

En esta sección se presenta la ecuación del filtro lineal, variante en el tiempo, basado en el desarrollo presentado en [8], con la ecuación de salida, que permiten la estimación de las derivadas con respecto al tiempo de una señal analógica medida.

Una señal temporal, analítica $y(t)$, se puede aproximar después de algunos instantes de tiempo t_t mediante una expansión en una serie de Taylor truncada como sigue

$$\tilde{y}(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(j-1)!}y^{(j-1)}(t_t)(t-t_t)^{j-1}1(t-t_t) \tag{16}$$

Esta serie de potencias se interpreta como k veces la integración del sistema sin entradas y condiciones iniciales $y^{(j-1)}(t_t)$, con $j=1,2,\ldots,k$, donde k es el orden de aproximación. Aplicando cálculo operacional y la fórmula de Leibniz es posible obtener un sistema lineal triangular de ecuaciones para calcular los estimados de las derivadas de la señal $y(t)$. (El desarrollo completo se presenta en [8], sección II).

Es posible obtener la siguiente fórmula recursiva para determinar las derivadas $y^{(\delta)}(t)$ de la señal $y(t)$, donde $1\le\delta\le k-1$ y $m=k-\delta-i$,

$$y^{(\delta)}(t)=\underbrace{\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{\delta-i}\frac{(k-i-1)!}{(k-\delta-1)!}(-1)^{i-\delta+1}\frac{1}{t^{k-i}}}_{=:a(k,\delta,i)}\tilde{y}^{(i)}+\underbrace{\sum_{m=1}^{k-\delta}\binom{k}{m+\delta}^{2}(-1)^{k-\delta-m}(m+\delta)!\frac{1}{t^{k}}\int_{t}^{(a)}t^{k-\delta-m}}_{=:b(k,\delta,m)}\tilde{y}(t) \tag{17}$$

Este sistema lineal de ecuaciones se interpreta como un filtro lineal variante en el tiempo con entradas variantes en el tiempo, que se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{z}_i(k,t)&=b(k,i,1)t^{k-i-1}y(t)+z_{i+1}(k,t), \qquad i=1,\ldots,k-2\\ \dot{z}_{k-1}(k,t)&=b(k,k-1,1)y(t).\end{aligned} \tag{18}$$

Al introducir los estados del filtro $z_i(k,t)$ a partir de la ecuación (18) se puede formular una ecuación para calcular las estimaciones de las derivadas

$$\tilde{y}^{(i)}(t)=\frac{(k+i-1)!}{i!(k-i-1)}\frac{1}{t^{i}}y(t)+\sum_{j=1}^{i}\binom{k+i-j-1}{i-j}\frac{(k-j-1)!}{(k-i-1)!}\frac{1}{t^{k+i-j}}z_j(k,t) \tag{19}$$

donde $i=1,\ldots,d$. La Fig.1, muestra el esquema completo del reconstructor de estados, el cual está compuesto por el filtro lineal (18) junto con la ecuación de salida (19), y un observador algebraico que se obtiene parametrizando los estados del sistema en términos de las señales de salida medibles.

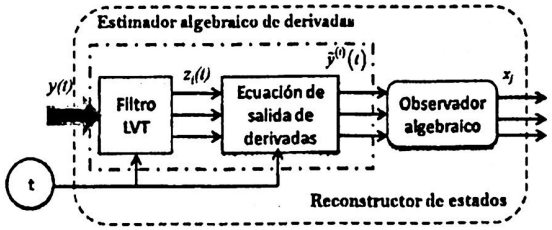


Fig. 1. Esquema completo del reconstructor de estados.

La ecuación (19) no está definida sobre el intervalo de tiempo [0, ε) con ε suficientemente pequeño, así que esta ecuación es válida sólo para $t\ge\varepsilon$. Las ecuaciones del estimador algebraico de las derivadas usadas son: a) Ecuación del filtro

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -882t^3 y(t) + z_2(t) & \dot{z}_4(t) &= 52920t^2 y(t) + z_5(t) \\ \dot{z}_2(t) &= 7350t^4 y(t) + z_3(t) & \dot{z}_5(t) &= -35280t y(t) + z_6(t) \\ \dot{z}_3(t) &= -29400t^3 y(t) + z_4(t) & \dot{z}_6(t) &= 5040 y(t) \end{aligned} \tag{20}$$

b) Ecuación de salida para estimación de las dos primeras derivadas

$$\dot{\bar{y}}(t) = \frac{42}{t} y(t) + \frac{1}{t^7} z_1(t), \qquad \bar{y}(t) = \frac{840}{t^2} y(t) + \frac{35}{t^5} z_1(t) + \frac{1}{t^7} z_2(t) \tag{21}$$

6 Diseño del Observador Algebraico para las Corrientes del Rotor

En esta sección se presenta el diseño de los observadores algebraicos para la estimación de las corrientes de rotor, I_{qr} e I_{dr}, las cuales no se encuentran disponibles para su medición.

El análisis parte del modelo del motor de inducción con resistencias explícitas, descrito por (12), este análisis consiste en encontrar una estimación para las corrientes del rotor dejando a éstas en función sólo de las salidas medibles (corrientes de estator I_{qs} e I_{ds}, y de la velocidad del rotor ω_r), de las entradas (voltajes del estator v_{qs} y v_{ds}), y de sus derivadas. El diagrama a bloques del diseño se presenta en la Fig. 2.

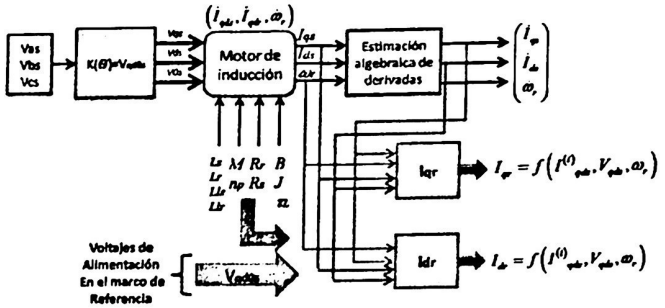


Fig. 2. Esquema de diseño de los observadores algebraicos para las corrientes del rotor.

A continuación se presenta el desarrollo de los cálculos para determinar las expresiones para la estimación de cada una de las corrientes de rotor. Se consideran los siguientes coeficientes para simplificar la manipulación de la ecuación de $\dot{I}_{qr}$ de acuerdo a (12)

$A_1 = \xi L_r R_{11}$; $A_2 = \xi R_{12} L_r$; $A_3 = \xi n_p M^2$; $A_4 = \xi M R_{11}$; $A_5 = \xi R_{12} M$; $A_6 = \xi n_p L_r M$; $A_7 = \xi L_r$

La ecuación para $\dot{I}_{qs}$ que se obtiene del modelo del motor de inducción, descrito en (12), se expresa entonces como

$$\frac{dI_{qs}}{dt} = -A_1 I_{qs} - A_2 I_{ds} - A_3 \omega_r I_{ds} + A_4 I_{qr} + A_5 I_{dr} - A_6 \omega_r I_{dr} + A_7 V_{qs} \tag{22}$$

Se consideran los siguientes coeficientes para simplificar la manipulación de la ecuación de $\dot{I}_{dr}$ de acuerdo a (12)

$B_1 = \xi L_r R_{s21}$; $B_2 = \xi n_p M^2$; $B_3 = \xi L_r R_{r22}$; $B_4 = \xi R_{r21} M$; $B_5 = \xi n_p L_r M$; $B_6 = \xi M R_{r22}$; $B_7 = \xi L_r$

La ecuación para I_{ds} que se obtiene del modelo del motor de inducción, descrito en (12), se expresa entonces como

$$\frac{dI_{ds}}{dt} = -B_1 I_{qs} + B_2 \omega_r I_{qs} - B_3 I_{ds} + B_4 I_{qr} + B_5 \omega_r I_{qr} + B_6 I_{dr} + B_7 V_{ds} \tag{23}$$

Para la estimación de la corriente del rotor de la fase del eje q se tiene

$$I_{qr} = \frac{\left[\begin{array}{l} \frac{\dot{I}_{qs}}{A_4} + \frac{A_1 I_{qs}}{A_4} + \frac{(A_2 + A_3\omega_r) I_{ds}}{A_4} - \frac{A_2 \dot{I}_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{A_3 (B_1 - B_2\omega_r) I_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{A_3 B_3 I_{ds}}{A_4 B_6} + \\ + \frac{A_3 B_7 V_{ds}}{A_4 B_6} + \frac{A_6 \omega_r \dot{I}_{ds}}{A_4 B_6} + \frac{A_6 \omega_r (B_1 - B_2\omega_r) I_{qs}}{A_4 B_6} + \frac{A_6 \omega_r B_3 I_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{A_6 \omega_r B_7 V_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{A_7 V_{qs}}{A_4} \end{array}\right]}{\left(1 - \frac{A_3 B_4}{A_4 B_6} - \frac{A_3 B_5 \omega_r}{A_4 B_6} + \frac{A_6 \omega_r B_4}{A_4 B_6} + \frac{A_6 B_5 \omega_r^2}{A_4 B_6}\right)} \tag{24}$$

Para la estimación de la corriente del rotor de la fase del eje d se tiene

$$I_{dr} = \frac{\left[\begin{array}{l} \frac{\dot{I}_{ds}}{B_6} + \frac{(B_1 - B_2\omega_r) I_{qs}}{B_6} + \frac{B_3 I_{ds}}{B_6} - \frac{B_4 \dot{I}_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_4 A_1 I_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_4 A_2 I_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{B_4 A_3 \omega_r I_{ds}}{A_4 B_6} + \\ + \frac{A_7 B_4 V_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_5 \omega_r \dot{I}_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{B_5 \omega_r A_1 I_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{B_5 \omega_r A_2 I_{ds}}{A_4 B_6} - \frac{B_5 A_3 \omega_r^2 I_{ds}}{A_4 B_6} + \frac{B_5 A_7 \omega_r V_{qs}}{A_4 B_6} - \frac{V_7 V_{ds}}{B_6} \end{array}\right]}{\left(1 - \frac{A_2 B_4}{A_4 B_6} - \frac{A_3 B_4 \omega_r}{A_4 B_6} - \frac{B_5 A_3 \omega_r}{A_4 B_6} + \frac{A_6 \omega_r^2 B_5}{A_4 B_6}\right)} \tag{25}$$

Los parámetros utilizados para la simulación del modelo se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros de simulación del modelo del motor de inducción Jaula de Ardilla.

Parámetro	Valor	Unidades
No. polos	4	-
Frecuencia	60	Hz
Voltaje de entrada	220	V
Rs	0.435	Ω
Rr	0.816	Ω

Parámetro	Valor	Unidades
Xls	0.754	Ω
Xlr	0.754	Ω
XM	26.13	Ω
TL	11.9	$N \cdot m$
J	0.089	$Kg \cdot m^2$

La Fig. 3 muestra las gráficas de las corrientes del rotor estimadas I_{qr} e I_{dr}, obtenidas del observador algebraico contra las que se obtienen de la salida del modelo del motor de inducción.

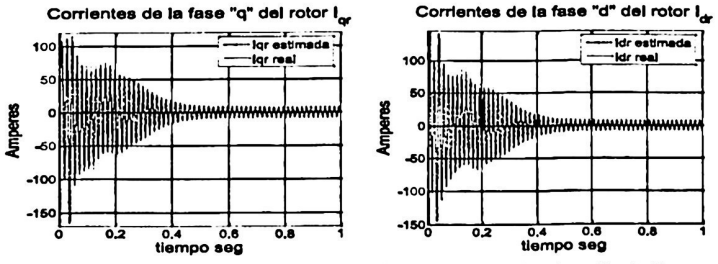


Fig. 3. Comparación de las corrientes del rotor I_{qr} e I_{dr} estimadas y "reales".

La Fig. 4 muestra la estimación de las corrientes, la cual es bastante rápida.

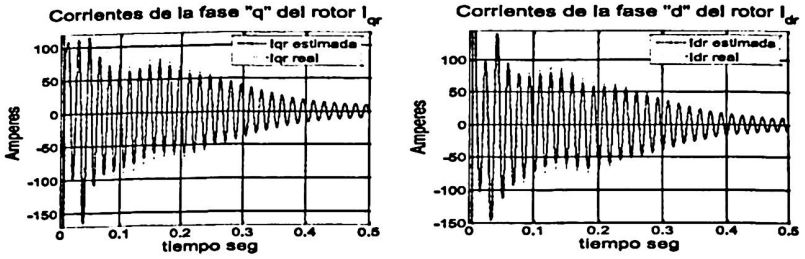


Fig. 4. Estimación rápida de las corrientes del rotor.

7 Conclusiones

Se logró resolver el problema de la estimación de las corrientes del estator para el motor de inducción tipo jaula de ardilla, empleando la condición de observabilidad algebraica y el enfoque algebraico diferencial. Se sugirió una metodología para el desarrollo de los observadores algebraicos para las corrientes y se realizaron las simulaciones convenientes. Esta metodología sugerida se presenta con miras a resolver a futuro el problema del diagnóstico y estimación de fallas en el motor de inducción.

Referencias

1. Anguelova, M.: Nonlinear observability and identifiability: General Theory and a case study of a kinetic model. PhD Thesis. Göteborg University, (2004).
2. Diop, S., Martínez-Guerra, R.: On an algebraic and differential approach of nonlinear systems diagnosis. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 585—589. IEEE press, USA (2001).
3. Diop, S.: The algebraic theory of nonlinear observability revisited. Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2550--2555. IEEE press, USA (2001).
4. Fliess, M.: Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 9, 994--1001 (1990).
5. Kolchin, E.R.: Differential Algebra and algebraic groups, Academic Press, (1973).
6. Luviano, A., Martínez-Guerra, R.: Reconstrucción de fallas empleando observadores algebraicos. Congreso Nacional de Control Automático 2006, pp. 183--187. UNAM, México, D.F. (2006).
7. Martínez-Guerra, R., Diop, S.: Diagnosis of nonlinear systems using an unknown-input observer: an algebraic and differential approach. IEEE Proc. Control Theory Appl. Vol. 151, No. 1, 130--135 (2004).
8. Reger, J., Sira-Ramírez, H., Fliess, M.: On non-asymptotic observation of nonlinear systems. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference 2005, pp. 4219--4224. IEEE press, Spain (2005).
9. Ritt, J.F.: Differential algebra. American Math. Asoc. (1950).
10. Vidal, E.: Diagnóstico y reconfiguración de fallas en un motor de inducción utilizando observadores no lineales. Tesis de maestría, Cenidet, México, (2006).

Dissipative Design of PI-Observers for Nonlinear Systems

Jaime A. Moreno*

Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México D.F., Mexico
JMorenoP@ii.unam.mx

Abstract. A new dissipative method to design observers for a large class of nonlinear systems has been introduced recently by the author. It generalizes and includes several well-known observer design methods in the literature. In this paper a procedure to design Proportional-Integral (PI) Observers based on the dissipativity theory is presented. Properties of these observers are discussed.

1 Introduction

Recently [1, 2] the author has proposed a Dissipative Design of Observers for nonlinear systems that can be transformed into the form

$$\Sigma : \{\dot{x} = Ax + G\psi(\sigma) + \varphi(t, y, u) \ , \ y = Cx \ , \ \sigma = Hx \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state x, $u \in \mathbb{R}^m$ is a known input, $y \in \mathbb{R}^p$ is the measured output, and $\sigma \in \mathbb{R}^r$ is a (not necessarily measured) linear function of the state. $\varphi(t, y, u)$ is an arbitrary nonlinear function of the time, the input and the output. $\psi(\sigma)$ is a q-dimensional vector that depends on the variable σ. ψ and φ are assumed to be locally Lipschitz in σ or y, continuous in u, and piecewise continuous in t, so that existence and uniqueness of solutions is guaranteed. It will be assumed that the trajectories of interest of Σ are defined for all the time, i.e. there are no finite escape times.

The design can in the most important cases be reduced to Linear Matrix Inequalities (LMI), that are numerically very well behaved, and have become standard in the field. This method generalizes and encompases several other design methods, as the High-Gain methodology [3, 4], and the observers for Lipschitz nonlinear systems [5], well-known in the literature.

The objective of this paper is to present two further results for dissipative observers. First a general method to robustify such observers is presented in the context of so called proportional (P) observers. This can be useful to improve the robustness to certain perturbations. As an example, it will be shown that the classical first order sliding mode observers [6, 7] and the robust observers

* This work was supported in part by DGAPA-UNAM, project PAPIIT IN112207, and CONACyT, Project 51244.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 85-94

[8] can be included in the dissipative methodology. The same basic idea for designing proportional observers can be extended to designing Proportional-Integral (PI) Observers. PI-Observers are very well known in the literature, in particular for linear systems [9–13], because of their robustness properties against constant perturbations. This is basically a consequence of the internal model principle, since the integral action represents an internal model of unknown constant perturbations, a fact that is widely used in robust regulation. Although most of the literature on PI-Observers is related to linear systems, there are some proposals to extend the idea to nonlinear systems. They use some specific nonlinear observer design methods, in particular, the design for Lipschitz systems [14, 15], and propose linear PI gains.

Our design idea consists basically of two steps. In the first one a nonlinear observer is designed by the dissipative method for the unperturbed system, so that many standard observer designs are included here. In a second step a robustifying nonlinear P or PI additional term is added to the basic nonlinear observer, providing improved performance properties. These terms are so constructed, that they inject more dissipation to the dissipative observer. For this kind of observers the separation property derived in [16] for the basic dissipative observers can be extended to systems with constant perturbations.

2 Preliminaries

2.1 Dissipative systems

In this work the stability properties of dissipative systems will be used for the design of observers for systems that can be represented as the feedback interconnection of a dynamical linear time invariant (LTI) system in the forward loop and a memoryless nonlinearity in the feedback loop. From the general dissipativity theory [17] (see also [1, 2]) the following results are of relevance here.

Consider the LTI continuous time system $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, and $y \in \mathbb{R}^m$ are the state, the input and the output vectors, respectively. Let us consider quadratic $\omega(y,u) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u$, where $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $S \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $R \in \mathbb{R}^{q\times q}$, and Q, R symmetric. System Σ_L is said to be ( ) with respect to the supply rate $\omega(y,u)$, or for short (Q,S,R)-SSD, if there exist a matrix $P = P^T > 0$, and $\epsilon > 0$ such that

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & , PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0 \,. \tag{2}$$

For quadratic systems, i.e. $m = q$, passivity corresponds to the supply rate $\omega(y,u) = y^T u$. Note that this definition assures the existence of a quadratic positive definite $V(x) = x^T P x$, such that along any trajectory of the system $\dot{V}(x(t)) \leq \omega(y(t), u(t)) - \epsilon V(x(t))$.

A time-varying memoryless nonlinearity $\psi : [0,\infty) \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$, $y = \psi(t,u)$, piecewise continuous in t and locally Lipschitz in u, such that $\psi(t,0) = 0$, is said

to be dissipative with respect to the supply rate $\omega(y,u)$, or for short (Q,S,R)-D. if it satisfies $\omega(\psi(t,u),u) \geq 0$, for every $t \geq 0$, and $u \in \mathbb{R}^q$. The classical sector conditions [18] for square nonlinearities, i.e. $m = q$, can be represented in this form. If ψ is in the sector $[K_1, K_2]$, i.e. $(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0$, then it is (Q,S,R)-D, with $(Q,S,R) = \left(-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2 + K_2^T K_1)\right)$.

A generalization of the circle criterion of absolute stability for non square systems can be easily obtained, and it will be used in the sequel.

Lemma 1. *[1, 2] Consider the feedback interconnection*

$$\dot{x} = Ax + Bu \ , \ y = Cx \ , \ u = -\psi(t,y) \ , \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

If the system (C,A,B) is $\left(-R_N, S_N^T, -Q_N\right)$-SSD, then $x = 0$ for (3) is globally exponentially stable for every (Q_N, S_N, R_N)-D nonlinearity.

2.2 A strong Lyapunov function

To analyze the convergence properties of PI-Observers it will be required to study conditions for the asymptotic stability of the interconnection of a nonlinear globally asymptotically stable system in the forward loop with an integrator in the feedback. This general class of systems is very important in adaptive control and identification [19] and it is usually studied, from a passive perspective, as the negative feedback interconnection of two passive subsystems. In this case the sum of the storage functions constitutes a weak Lyapunov function. that is. one whose time derivative is only negative semidefinite. even in the cases when asymptotic stability can be assured. We will be interested here in a special class with a time-invariant interconnection. The novelty of our result here is that we will provide explicit conditions for the global exponential stability of the whole system and we will give a *strong* Lyapunov function that ensures this.

Consider the following system

$$\Xi : \{\dot{x} = f(x,t) + Bk(z) \ , \ \dot{z} = Cx \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , z \in \mathbb{R}^p \tag{4}$$

where $f(x,t)$ is locally Lipschitz in x and measurable in t, $k : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ is locally Lipschitz continuous and it is the gradient of a scalar, positive definite, decrescent, radially unbounded, continuously differentiable function $W(z)$, i.e. $k^T(z) = \partial_z W(z)$, $k(0) = 0$, and B, C are constant matrices of appropriate dimensions. Assume that $f(0,t) = 0$, and that the system $\dot{x} = f(x,t)$ has zero as a globally uniformly asymptotically stable equilibrium point, and that there is a quadratic Lyapunov function $V(x) = x^T P x$, with P symmetric and positive definite, such that $\dot{V}(x) = \partial_x V(x) f(x,t) \leq -\epsilon V(x)$, with $\epsilon > 0$. From a passivity approach it follows that, if $B = -P^{-1}C^T$ then the function $V^*(x,z) = V(x) + W(z)$ satisfies

$$\dot{V}^*(x,z) \leq -\epsilon V(x) - x^T C^T k(z) + \partial_z W(z) Cx = -\epsilon V(x) \ .$$

From this property it follows the uniform stability of the equilibrium point, the boundedness of the trajectories and the asymptotic convergence to zero of x. To

assure the uniform asymptotic stability of the origin further conditions. e.g. the Theorem of Matrosov, have to be used. V^* is therefore a *weak* Lyapunov function for the system. Here we propose a *strong* Lyapunov function, that assures the GUAS of the origin, under some additional assumptions.

Proposition 1. *Consider the system (4) satisfying the given conditions. Suppose further that $f(x,t)$ is globally Lipschitz in x uniformly in t, that the Jacobian matrix of $k(z)$ is continuous, and it is uniformly upper and lower bounded, and that C has full row rank. Under these conditions*

$$U(x,z) = \delta V^*(x,z) + x^T C^T k(z) \ ,$$

with $\delta > 0$ a sufficiently large constant, is a strong Lyapunov function for the system, and the equilibrium point is globally exponentially stable.

Proof. We show first that for δ sufficiently high U is positive definite and decrescent, i.e. there exist K_∞ functions α_1, α_2 such that $\alpha_1(\|(x,z)\|) \leq U(x,z) \leq \alpha_2(\|(x,z)\|)$. Note that

$$U(x,z) = \delta x^T P x + x^T C^T k(z) + \delta W(z) = \delta x^T P x + x^T C^T H(tz)\, z + \frac{1}{2}\delta z^T H(tz)\, z \ ,$$

since from the mean value theorem it follows that $W(z) = \frac{1}{2} z^T H(tz)\, z$, $k(z) = H(\tau z)\, z$, for some $t, \tau \in (0,1)$, and where $H(z) = \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2}$ is the Hessian matrix of $W(z)$. Since, by assumption, $c_1 \mathbf{I} \leq H(z) \leq c_2 \mathbf{I}$ for all $z \in \mathbb{R}^p$ and some positive constants c_1, c_2, it follows easily that U is positive definite and decrescent for some value of δ sufficiently large. Next we show that the derivative of U is negative definite. Recall that by the Lipschitz hypothesis $\|f(x,t)\| \leq \lambda \|x\|$, for all $t \geq 0$ and $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\dot{U}(x,z) \leq -\begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq -\alpha_3(\|(x,z)\|) \ .$$

where

$$\Theta = \begin{bmatrix} \delta\epsilon P - C^T H(z)\, C & \frac{1}{2}\lambda C^T H(\tau z) \\ \frac{1}{2}\lambda H(\tau z)\, C & H(\tau z)\, C P^{-1} C^T H(\tau z) \end{bmatrix} \ .$$

It follows that $\dot{U}$ is negative definite for some δ sufficiently large. Moreover, since α_1, α_2 and α_3 are all quadratic functions, global exponential stability follows.

3 Dissipative Observer Design

The Dissipative Design of Observers is a method recently proposed in [1,2]. Its basic idea is to decompose the observer error dynamics into dissipative subsystems, and using the dissipative theory, design the output injection in such a way, that the error dynamics converges. For the particular class of systems described

by the form (1) the results are particularly suitable for calculations. A full order observer for Σ of the form

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + G\psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) + \varphi(t, y, u) \ , \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = C\hat{x} \ , \ \hat{\sigma} = H\hat{x} \end{cases} \tag{5}$$

is proposed, where matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$, and $N \in \mathbb{R}^{r \times p}$ have to be designed. Defining the state estimation error by $e \triangleq \hat{x} - x$, the output estimation error by $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$, and the functional estimation error by $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$, the dynamics of e can be written as

$$\Xi : \{\dot{e} = A_L e + G\nu \ , \ z = H_N e \ , \ \nu = -\phi(z, \sigma) \ , \tag{6}$$

where $A_L \triangleq A + LC$, $H_N \triangleq H + NC$, $z \triangleq H_N e$, and a new nonlinearity $\phi(z, \sigma) \triangleq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z)$. Note that $\phi(0, \sigma) = 0$ for all σ. Note that, in general, the error dynamics (6) is not autonomous, since it is driven by the system (1) through the linear function of the state $\sigma = Hx$. ϕ is therefore a time varying nonlinearity, whose time variation depends on the state trajectory of the plant.

The observer design consists in finding matrices L and N, if they exist, so that Ξ satisfies the conditions of Lemma 1. For this it is necessary to assume that the nonlinearity ϕ satisfy one or several supply rates ω: ϕ is (Q_i, S_i, R_i)-dissipative for some finite set of non positive semidefinite quadratic forms $\omega_i(\phi, z) = \phi^T Q_i \phi + 2\phi^T S_i z + z^T R_i z \geq 0$, for all σ, for $i = 1, 2, \cdots, M$.

Note that if ϕ satisfies the assumption, then it is $\sum_{i=1}^{M} \theta_i (Q_i, S_i, R_i)$-dissipative for every $\theta_i \geq 0$, i.e. ϕ is dissipative with respect to the supply rate $\omega(\phi, z) = \sum_{i=1}^{M} \theta_i \omega_i(\phi, z)$. In this case the design is as follows:

Theorem 1. ϕ

$L \quad N \qquad \theta = (\theta_1, \cdots, \theta_M) \ \ \theta_i \geq 0$

$\Xi \quad (-R_\theta, S_\theta^T, -Q_\theta) \qquad (Q_\theta, S_\theta, R_\theta) = \sum_{i=1}^{M} \theta_i (Q_i, S_i, R_i)$

$P = P^T > 0 \qquad K \ \ W \qquad \epsilon > 0$

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R_\theta H_N \ , & PG - H_N^T S_\theta^T \\ G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq 0 \ , \tag{7}$$

$\Omega \qquad\qquad\qquad\qquad \Sigma \qquad\qquad\qquad\qquad \kappa, \gamma >$

$0 \qquad \|e(t)\| \leq \kappa \|e(0)\| \exp(-\gamma t) \qquad e(0) \qquad t \geq 0$

$V(e) = e^T P e \qquad\qquad\qquad\qquad \Xi \qquad \dot{V} \leq -\epsilon V(e)$

The observer design relies on finding (if they exist) matrices L and N, a vector $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_M)$, $\theta_i \geq 0$, a matrix $P = P^T > 0$, and $\epsilon > 0$ such that the inequality (7) is satisfied. In general this is a nonlinear matrix inequality feasibility problem. However, if N is fixed, then it is a Linear Matrix Inequality (LMI) feasibility problem, for which a solution can be effectively found by several algorithms in the literature [20].

The proposed method generalizes, unifies and improves several methods previously proposed in the literature. Some of them are [1]: (i) The Circle criterion design: It is easy to see that this method generalizes and improves the one proposed originally in [21], and further developed in [22] (and references therein): our design is valid for non-square systems, the nonlinearities are of general type, and can be described by several sector conditions. (ii) Lipschitz observer design: proposed recently by [5]. (iii) High-Gain observer design: The well-known high-gain observer (HG) design [3] is a special case of the one proposed here.

4 A Robustified Dissipative Observer Design

If the conditions of Theorem 1 are satisfied then (5) is a convergent observer for the plant. However it is useful to be able to add more dissipation to the observer error dynamics. In this section, based on the original design, a redesigned, more dissipative observer will be proposed.

Consider the error dynamics of the observer (6). The design pursued was obtained assigning the right dissipativity to the LTI map $\nu \rightarrow z$ to compensate the nonlinearity ϕ. Similar to the idea of adding damping control, well-known in the literature [23], an additional dissipation term will be added to the error dynamics. For this consider an additional "input" v to the error system $\dot{e} = A_L e - G\phi(H_N e, \sigma) + v$, $\tilde{y} = Ce$. Since $V(e) = e^T P e$ is a Lyapunov function for the system we have for Ξ_v that $\dot{V} \leq -\epsilon V(e) + e^T P v$. Selecting $v = -P^{-1}C^T Q^T \chi(Q\tilde{y}, t)$, where Q is an arbitrary matrix, and χ satisfies $\xi^T \chi(\xi, t) \geq 0$, $\forall \xi$, $\forall t \geq 0$, then

$$\dot{V} \leq -\epsilon V(e) - e^T P P^{-1} C^T Q^T \chi(Q\tilde{y}, t) = -\epsilon V(e) - \tilde{y}^T Q^T \chi(Q\tilde{y}, t) \leq -\epsilon V(e) \ .$$

This shows that an extra dissipative term has been added to the error equation. This enhances the convergence properties of the observation error, what can be used for robustification of the observer. Note that with this selection the map $r \rightarrow w$ of the error equation

$$\Xi_v : \begin{cases} \dot{e} = A_L e - G\phi(z, \sigma) + P^{-1} C^T Q^T r \ , \\ \tilde{y} = Ce \ , \ z = H_N e \ , \ w = Q\tilde{y} \ , \ r = -\chi(w, t) \ , \end{cases} \tag{8}$$

becomes strictly passive. To realize this extra term in the error equation, the observer has to be redesigned as

$$\Omega_R : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + G\psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) + \varphi(t, y, u) - P^{-1} C^T Q^T \chi(Q\tilde{y}, t) \ , \\ \hat{y} = C\hat{x} \ , \ \hat{\sigma} = H\hat{x} \end{cases} \tag{9}$$

This proves the following

Lemma 2.

$\chi(\xi,t)$ $\xi^T\chi(\xi,t) \geq 0$, $\forall\xi$, $\forall t \geq 0$ Ω_R ( )

Σ ( )

There are many possible selections for the function χ. For example, selecting $Q = I$ and $\chi(\tilde{y}) = \text{sign}(\tilde{y})$ one recovers the sliding mode observer [6, 7] and the robust observers [8], with global convergence properties.

The previous lemma shows that the state estimation error of the (robustified) dissipative observer (9) converges exponentially, with a convergence rate that is independent of the trajectories of the plant. The following Lemma states a robustness property of the observation error against external perturbations and the convergence of the nonlinear signals.

Lemma 3. $\phi(z,\sigma)$ $\chi(w,t)$ z w

$\phi(z(t),\sigma(t))$ $\chi(w(t),t)$

L_1 $\phi(z,\sigma)$ $\chi(w,t)$

$\delta_1(t)$ $\delta_2(t)$

$\delta_1(t)$ $\delta_2(t)$

( )

5 A Dissipative Proportional-Integral Observer Design

The observer designed in Theorem 1 is , since only a static nonlinear function of the estimation error is injected. It is well known that the injection of an integral term of the estimation error greatly improves the robustness properties of the observer. In what follows, a (nonlinear) proportional-integral term will be included in the dissipative observer, and the properties of such observer will be studied using the dissipativity theory.

A ( ) for system (1) is a dynamical system Ω_{PI} that has as inputs the input u and the output y of Σ, and its output $\hat{x}$ is an estimation of the state x of Σ. A full order PI observer for Σ of the form

$$\Omega_{PI}: \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L\tilde{y} + G\psi(\hat{\sigma} + N\tilde{y}) + \varphi(t,y,u) + E[\varkappa_I(\xi) + \varkappa_P(K\tilde{y})] \ , \\ \dot{\xi} = K\tilde{y} \ , \ \hat{y} = C\hat{x} \ , \ \hat{\sigma} = H\hat{x} \ , \ \tilde{y} = \hat{y} - y \ , \ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \tag{10}$$

is proposed, where matrices $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $N \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $K \in \mathbb{R}^{q\times p}$, and $E \in \mathbb{R}^{n\times q}$, and the functions $\varkappa_I : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, and $\varkappa_P : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ have to be designed. The dynamics of the error system Ξ_{PI} can be written as the feedback interconnection of two systems:

$$\Xi_{PI}: \begin{cases} \Xi_1 : \{\dot{e} = A_L e - G\phi(H_N e,\sigma) + Ev \ , \ \tilde{\gamma} = KCe \ , \\ \Xi_2 : \{\dot{\xi} = \tilde{\gamma} \ , \ v = \varkappa_I(\xi) + \varkappa_P(\tilde{\gamma}) \ , \end{cases} \tag{11}$$

The objective of the design is to render the (closed) set $\{(e,\xi) \in \mathbb{R}^{n\times q} \mid e=0\}$ asymptotically stable for system Ξ_{PI}. Since $V_1(e) = e^T P e$ is a Lyapunov function for the system we have for Ξ_1 that $\dot{V}_1 \leq -\epsilon V_1(e) - e^T P E(-v)$. If K and E are selected such that $e^T P E = -\tilde{\gamma}^T = -e^T C^T K^T$, then it follows that Ξ_1 is strictly state passive from $(-v) \to \tilde{\gamma}$.

It will be shown in the sequel that if $\varkappa_I(\cdot)$ and $\varkappa_P(\cdot)$ are selected appropriately, then the subsystem Ξ_2 is also passive from $\tilde{\gamma} \to v$. Consider a C^1 function $V_2(\xi) \geq 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}^q$, and $V_2(0) = 0$. Select $\varkappa_I(\xi) = (\partial_\xi V_2(\xi))^T$. Then it is clear that $V_2(\xi) = \int_0^\xi \varkappa_I(z) \cdot dz$. Moreover, if $\varkappa_P(\cdot)$ is such that $\varkappa_P^T(\tilde{\gamma})\tilde{\gamma} \geq 0$ for all $\tilde{\gamma}$, then along the trajectories of Ξ_2 it is satisfied

$$\dot{V}_2(\xi) = \varkappa_I^T(\xi)\dot{\xi} = \varkappa_I^T(\xi)\tilde{\gamma} = -\varkappa_P^T(\tilde{\gamma})\tilde{\gamma} + v^T\tilde{\gamma} \leq v^T\tilde{\gamma} .$$

It follows then that the time derivative of the storage function $V(e,\xi) = V_1(e) + V_2(\xi)$ along the solutions of Ξ_{PI} is $\dot{V}(e,\xi) \leq -\epsilon V_1(e) - \tilde{\gamma}^T v - \varkappa_P^T(\tilde{\gamma})\tilde{\gamma} + v^T\tilde{\gamma} \leq -\epsilon V_1(e) - \varkappa_P^T(\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}$. This ensures that $e(t) \to 0$ as $t \to \infty$. Moreover, if $V_2(\xi)$ is radially unbounded, then the state (e,ξ) will be bounded.

If convergence of the equilibrium point $(e,\xi) = 0$ is desired, further conditions are required. A set of such conditions are given in the next theorem, together with a strong Lyapunov function to ensure this.

Theorem 2.
$\psi(\sigma)$ $\varkappa_P(\tilde{\gamma})$ $K \in \mathbb{R}^{q\times p}$ KC
C^2 $\mathbb{R}^q$ $V_2(\xi)$
$V_2(0) = 0$ $E = -P^{-1}C^T K^T$ $\varkappa_I(\xi) = \left(\frac{\partial V_2(\xi)}{\partial \xi}\right)^T$ $\varkappa_P^T(\tilde{\gamma})\tilde{\gamma} \geq 0$
Ω_{PI} ( ) Σ
$U(e,\xi) = \delta e^T P e + e^T C^T K^T \varkappa_I(\xi) + \delta V_2(\xi)$
δ

Let us rewrite the system as $\dot{e} = f(e,\sigma) - P^{-1}C^T K^T \varkappa_I(\xi)$, $\dot{\xi} = KCe$, where $f(e,\sigma) \triangleq A_L e - G\phi(H_N e, \sigma) - P^{-1}C^T K^T \varkappa_P(KCe)$. From the Hypothesis it follows that $f(e,\sigma)$ is globally Lipschitz uniformly in σ. Consider $V(e) = e^T P e$. Its time derivative along the solutions of system $\dot{e} = f(e,\sigma)$ is $\dot{V}(e) = e^T P f(e,\sigma) \leq -\epsilon V(e)$. The result then follows directly from Prop. 1.

A particular, but important, case is the one when $\varkappa_I(\xi)$ and $\varkappa_P(\tilde{\gamma})$ are linear functions, i.e. $\varkappa_I(\xi) = K_I\xi$, $K_I = K_I^T > 0$, $\varkappa_P(\tilde{\gamma}) = K_P\tilde{\gamma}$, $K_P > 0$. In this case $V_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi^T K_I \xi$. However, it is also possible to use nonlinear and discontinuous functions $\varkappa_P(\tilde{\gamma})$, as in the previous section.

6 Robustness properties of the PI-Observer

Consider the plant (1) with a constant input perturbation

$$\Sigma : \{\dot{x} = Ax + G\psi(\sigma) + \varphi(t,y,u) + Dw \ , \ y = Cx \ , \ \sigma = Hx \qquad (12)$$

where $w \in \mathbb{R}^q$ is a constant (or slowly time-varying) perturbation. If a PI-Observer (10) is designed, then the error dynamics becomes

$$\Xi_{PI} : \begin{cases} \Xi_1 : \{\dot{e} = A_L e - G\phi(H_N e, \sigma) + E\upsilon - Dw \ , \ \tilde{\gamma} = KCe \ , \\ \Xi_2 : \begin{cases} \dot{\xi} = \tilde{\gamma} \ , \ \upsilon = \varkappa_I(\xi) + \varkappa_P(\tilde{\gamma}) \ , \end{cases} \end{cases}$$

or also, taking $E = -P^{-1}C^T K^T = D$, $\dot{e} = f(e,\sigma) + D(\varkappa_I(\xi) - w)$, $\dot{\xi} = KCe$, where $f(e,\sigma) \triangleq A_L e - G\phi(H_N e, \sigma) - P^{-1}C^T K^T \varkappa_P(KCe)$. Defining $\bar{\xi} = \varkappa_I^{-1}(w)$, that exists for every w, since $\varkappa_I$ is globally invertible, and introducing $e_\xi = \xi - \bar{\xi}$, the error dynamics becomes

$$\Xi_{PI} : \left\{\dot{e} = f(e,\sigma) + D\left(\varkappa_I\left(\bar{\xi} + e_\xi\right) - \varkappa_I\left(\bar{\xi}\right)\right) \ , \ \dot{e}_\xi = KCe + \zeta \ ,\right.$$

where $\zeta = d\bar{\xi}/dt = \left(\partial_\xi \varkappa_I\left(\bar{\xi}\right)\right)^{-1} \dot{w}$ is related to the time derivative of w. Then from Lemma 3 and Theorem 2 it follows easily the following convergence result for the PI-Observer.

Theorem 3.

$(\quad)$ $D =$
$-P^{-1}C^T K^T$ $E = D$
Ω_{PI} $(\quad)$ Σ $\hat{x} \to x$
$\xi \to \bar{\xi}$ w $(\quad)$
w (e, e_ξ)
w

When the (unknown) perturbation is constant, its value can be determined from the state of the integral term, since $w = \varkappa_I\left(\bar{\xi}\right)$. If w changes slowly, this estimation is correct up to a small error. When the matching condition $D = -P^{-1}C^T K^T$ is satisfied, the effect of the perturbation can be compensated exactly by the integral term of the PI-observer.

7 Conclusions

A new dissipative method to design observers for a large class of nonlinear systems has been introduced recently by the author. It generalizes and includes several well-known observer design methods in the literature. In this paper a procedure to increase the robustness of these dissipative observers is presented. The increased performance can be obtained by means of (nonlinear) proportional or proportional-integral terms. These PI-Observers have the usual properties of systems with integral terms, that are robust against constant perturbations, and they can be used, in principle, for robust regulation purposes.

References

1. Moreno, J.A.: Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. In: Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004, Oaxaca, Mexico, Dec. 8-10, 2004, IFAC (2004) 735–740
2. Moreno, J.: Approximate Observer Error Linearization by Dissipativity Methods. In: Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems. Volume 322 of Lect. Notes in Cont. Inf. Sci.. Springer (2005) 35–51
3. Gauthier, J.P., Hammouri, H., Othman, S.: A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. IEEE Trans. Aut. Cont. **37** (1992) 875–880
4. Gauthier, J.P., Kupka, I.: Deterministic Observation Theory and Applications. Cambridge University Press, Cambridge, UK (2001)
5. Rajamani, R.: Observers for Lipschitz nonlinear systems. IEEE Trans. Automatic Control **43** (1998) 397–401
6. Drakunov, S., Utkin, V.: Sliding-mode observers. tutorial. In IEEE, ed.: Proc. 34th IEEE Conf. on Dec. and Cont., New Orleans, LA, USA (1995) 3376–3378
7. Tan, C.P., Edwards, C.: An lmi approach for designing sliding mode observers. Int. J. of Cont. **74**(16) (2001) 1559–1568
8. Walcott, B., Zak, S.: State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. IEEE Trans. Aut. Cont. **32** (1987) 166–169
9. Beale, S., Shafai, B.: Robust control system design with a proportional integral observer. Int. J. Cont. **50**(1) (1989) 97–111
10. Busawon, K.K., Kabore, P.: Disturbance attenuation using proportional integral observers. Int. J. Cont. **74**(6) (2001) 618–627
11. Chang, J.L.: Applying discrete-time proportional integral observers for state and disturbance estimations. IEEE Trans. Aut. Cont. **51**(5) (May 2006) 814–818
12. Koenig, D.: Unknown input proportional multiple-integer observer design for linear descriptor system. IEEE Trans. Aut. Cont. **50**(2) (Feb. 2005) 212–217
13. Shafai, B., Pi, C.T., Nork, S.: Simultaneous disturbance attenuation and fault detection using proportional integral observers. In: Proc. Amer. Cont. Conf., Anchorage, AK (2002) 1647–1649
14. Koenig, D.: Observer design for unknown input nonlinear descriptor systems via convex optimization. IEEE Trans. Aut. Cont. **51**(6) (Jun. 2006) 1047–1052
15. Ibrir, S.: Robust state estimation with q-integral observers. In: Proc. 2004 Amer. Cont. Conf., Boston, Massachusetts (2004) 3466–3471
16. Moreno, J.: A separation property of dissipative observers for nonlinear systems. In: Proc. 45th IEEE Conf. Dec. and Cont., San Diego, CA, USA (2006) 1647–1652
17. Van der Schaft, A.: L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. 2nd edn. Springer-Verlag, London (2000)
18. Khalil, H.: Nonlinear Systems. 3rd ed. Prentice, Upsaddle Riv., N.J. (2002)
19. Marino, R., Tomei, P.: Nonlinear Control Design; Geometric, Adaptive & Robust. Prentice Hall, London (1995)
20. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V.: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, Philadelphia (1994)
21. Arcak, M., Kokotovic, P.: Nonlinear observers: A circle criterion design. In: Proc. 38th. Conf. Dec. & Cont., Phoenix, Arizona, USA, IEEE (1999) 4872–4876
22. Fan, X., Arcak, M.: Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. Systems & Control Letters **50** (2003) 319–330
23. Sepulchre, R., Jankovic, M., Kokotovic, P.: Constructive Nonlinear Control. Springer-Verlag, New York (1997)

Velocity Estimation Using Adaptive Observers

Marcos A. González Olvera*[1] and Yu Tang **[1]

Department of Control Engineering, Engineering Faculty, National Autonomous University of Mexico, Mexico City. mangel@verona.fi-p.unam.mx, tang@servidor.unam.mx

Abstract. In this paper we propose a velocity estimator for servo applications based on adaptive observers. Exponential convergence to zero of the estimation error and parameter identification error is established. A numerical example is included to illustrate the results, where a velocity estimation is done even without the direct knowledge of the state equations, only with the knowledge of the output equation.

Keywords: System Identification, Linear Systems, Adaptive Observer.

1 Introduction

Linear systems are the basis of many control analysis and synthesis. If a system has a linear state-space representation, several control strategies can be used. In particular for linear time invariant systems, when the states are not available for direct measurement, linear observers can be proposed for estimating these and a linear control strategy may be implemented. The most used and popular one is the Luenberger observer. In this sense, several works have been made and textbooks exist on this subject (see, e.g.,[1]). In particular, when the states are not available but the parameters are assummed to be known, effective strategies based on sliding modes have been proposed [2].

However, when the parameters of the linear model are unknown, parametric identification prior to observer and control design must be done. In the case where states and parameters are unknown, and only the output can be measured, the problem turns to be harder to solve. This problem has been studied in the literature under the topic known as adaptive observers, where the strategy focuses on a certain canonic form and the minimal number of parameters that can describe the dynamical behavior of a system. In [3] a succinct description of various adaptive identifiers is described.

In this paper we propose a velocity estimator for servo applications based on adaptive observers [4, 5] for linear systems. For nonlinear systems, a general scheme was presented in [6]. This algorithm tends to be simpler in its implementation with an easier structure than those reported in the literature [7], [8],[3], [9]. Two examples are shown in order to illustrate the effectiveness of the algorithm.

* The work of Marcos A. González-Olvera is supported by CONACyT-Mexico.
** The work of Yu Tang is supported in part by PAPIIT-IN106206.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 95-104

2 Problem Statement

Let a single-input-single-output system be described by the linear state-space equation

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \tag{1}$$

We assume that C is known, A and B are unknown, the pair (A, C) is observable and y and u are known and measurable. Then, there exists a linear matrix L such that places the eigenvalues of the matrix $A_c = A - LC$ in any location, although its parameters are unknown. In general, we consider that the matrix A_c is Hurwitz.

If this assumptions are fulfilled, then an output injection Ly can be done in the in the form

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - LC)\mathbf{x} + LC\mathbf{x} + Bu = A_c\mathbf{x} + Ly + Bu$$

In this sense, the system can be rewritten as

$$\dot{\mathbf{x}} = A_c\mathbf{x} + \left[I_{n\times n}y \vdots I_{n\times n}u \right] \begin{bmatrix} L \\ \cdots \\ B \end{bmatrix} = A_c\mathbf{x} + \varphi(y,u)\theta \tag{2}$$

where

$$\varphi(y,u) = \left[I_{n\times n}y \vdots I_{n\times n}u \right] \tag{3}$$

and

$$L = \left[l_1 \cdots l_n \right]^T,\ B = \left[b_1 \cdots b_n \right]^T,\ \theta = \left[\begin{array}{c:c} l_1 \cdots l_n & b_1 \cdots b_n \end{array} \right]^T = \begin{bmatrix} L \\ B \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Now, if the matrices L and B are found by identification, then the dynamics of matrix A can be known; that is, $A = A_c + LC$.

2.1 Persistent excitation condition for $\varphi(y, u)$

Now, in order to assure that in the parametric identification process is done, a persistent excitation condition is needed for $\varphi(y, u)$. This condition is fulfilled if there exists a positive lower bound α such that

$$\int_t^{t+T} \varphi^T\varphi d\tau \geq I\alpha \tag{5}$$

Theorem 1 *The regressor (3) is persistently excited if y and u are nonzero and not linearly dependent in $[t, t + T]$.*

Proof. Without loss of generality, consider $\int_t^{t+T} f(\tau)d\tau$ as $\int f(\tau)d\tau$. Let

$$M = \int_t^{t+T} \varphi^T\varphi d\tau = \int \begin{bmatrix} Iy \\ \cdots \\ Iu \end{bmatrix} \left[Iy \vdots Iu \right] d\tau = \int \left[\begin{array}{c:c} Iy^2 & Iyu \\ \hdashline Iyu & Iu^2 \end{array} \right] d\tau \tag{6}$$

Now define $N = \int Iy^2 d\tau$, $P = \int Iyud\tau$ and $Q = \int Iu^2 d\tau$. So,

$$M = \left[\begin{array}{c:c} N & P \\ \hdashline P & Q \end{array}\right] \tag{7}$$

We need to check the determinant of M in $[t, t+T]$ in order to evaluate if it loses rank in some point, and so, making $\alpha > 0$ non existent. By its Schur complements, the determinant of M can be evaluated as

$$M = \det(N)\det(Q - PN^{-1}P) \tag{8}$$

For the first factor, as y is nonzero and N is a diagonal matrix,

$$\det(N) = \prod_i^n \int y^2 d\tau = \left(\int y^2 d\tau\right)^n > 0$$

.

The second factor can be easily evaluated, as the argument is composed by diagonal matrices. So, we have that

$$\begin{aligned} \det(Q - PN^{-1}P) &= \prod_i^n \left(\int u^2 d\tau - \frac{\int yud\tau \int yud\tau}{(\int y^2 d\tau)^{-1}}\right) \\ &= \prod_i^n \left(\frac{\int u^2 d\tau \int y^2 d\tau - (\int yud\tau)^2}{\int y^2 d\tau}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

By the Cauchy-Schwartz inequality, we know that, if u and y are linearly independent and nonzero in $[t, t+T]$, then

$$\int u^2 d\tau \int y^2 d\tau > \left(\int yud\tau\right)^2 \tag{10}$$

It follows that $\det(Q - PN^{-1}P) > 0$, and finally $M > 0$, so there exists a positive α such that $M > \alpha I$.

3 Identification based on an Adaptive Observer

To identifiy L and B, we use the adaptive observer proposed by [4], that makes a dual estimation of states and parameters. The equations that describe this observer are:

$$\dot{\Upsilon} = (A_c - KC)\Upsilon + \varphi(y, u) \tag{11}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \Upsilon^T C^T (y - C\hat{x}) \tag{12}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A_c\hat{\mathbf{x}} + \varphi(y, u)\hat{\theta} + (K + \Upsilon\Gamma\Upsilon^T C^T)(y - C\hat{\mathbf{x}}) \tag{13}$$

where Υ is a filtered signal from $\varphi(y, u)$.

This equations are obtained from the following analysis. In first place, consider the linear system defined by (2) to work as a parallel model for (1). The problem turns out into a joint identification problem of both $\mathbf{x}$ and θ. As the pair (A_c, C) is observable, and L is previously designed as an output injection that preserves the observability of the pair (A_c, C) a vector $K \in \Re^n$ can be found such that the matrix $A - LC - KC = A_c - KC$ is Hurwitz.

Taking $\varphi = \varphi(y, u)$ and following this, an output injection is considered for the state equation in the form

$$\dot{\mathbf{x}} = (A_c - KC)\mathbf{x} + \varphi\theta + Ky. \tag{14}$$

Following a similar treatment as [5], the states can be decomposed into

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_y + \mathbf{x}_\varphi, \tag{15}$$

where $\mathbf{x}$ is composed by the linear combination of two signals $\mathbf{x}_y$, $\mathbf{x}_\varphi$,

$$\dot{\mathbf{x}}_y = (A_c - KC)\mathbf{x}_y + Ky, \tag{16}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_\varphi = (A_c - KC)\mathbf{x}_\varphi + \varphi\theta. \tag{17}$$

As the dynamics for $\mathbf{x}_y$ are given in a linear form, an estimator for this signal can be obtained by the linear observer

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_y = (A_c - KC)\hat{\mathbf{x}}_y + Ky, \tag{18}$$

and an estimator for $\mathbf{x}_\varphi$ is proposed to have the form

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_\varphi = (A_c - KC)\hat{\mathbf{x}}_\varphi + \varphi\hat{\theta} + \Upsilon(t)\dot{\hat{\theta}}, \tag{19}$$

where Υ defines a dynamic transformation $\hat{\mathbf{x}}_\varphi = \Upsilon(t)\hat{\theta}$. By developing the derivative of $\hat{\mathbf{x}}_\varphi$,

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_\varphi}{dt} = \dot{\Upsilon}\hat{\theta} + \Upsilon\dot{\hat{\theta}}_{\mathbf{x}}, = (A_c - KC)\Upsilon\hat{\theta}_{\mathbf{x}} + \varphi\hat{\theta} + \Upsilon\dot{\hat{\theta}}, \tag{20}$$

we have that

$$\dot{\Upsilon}\hat{\theta} = (A_c - KC)\Upsilon\hat{\theta} + \varphi\hat{\theta}, \tag{21}$$

$$\left(\dot{\Upsilon} - (A_c - KC)\,\Upsilon - \varphi\right)\hat{\theta} = 0. \tag{22}$$

This last equation gives

$$\dot{\Upsilon} = (A_c - KC)\,\Upsilon + \varphi, \tag{23}$$

which describes a filtered matrix of the regressor φ. Since φ is bounded, so is Υ because $A_c - KC$ a Hurwitz matrix. The adaptive algorithm is proposed to be

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma\Upsilon^T C^T(y - C\hat{\mathbf{x}}), \tag{24}$$

where Γ is a positive definite constant gain matrix. The stability and convergence of the proposed observer and the adaptive algorithm are summarized in the following theorem.

Theorem 2 *Consider the system (1). Assume that it is observable and so transformable into the equivalent system* (2). *The following system*

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A_c\hat{\mathbf{x}} + \varphi(y,u)\hat{\theta} + \left(K + \Upsilon\Gamma\Upsilon^T C^T\right)(y - C\hat{\mathbf{x}}), \tag{25}$$

with the adaptive algorithm

$$\dot{\hat{\theta}}_{\mathbf{x}} = \Gamma\Upsilon^T C^T(y - C\hat{\mathbf{x}}), \tag{26}$$

where $\Gamma > 0$, *and the gain matrix* $K \in \Re^n$ *is such that* $A - KC$ *is Hurwitz, and*

$$\dot{\Upsilon} = (A_c - KC)\Upsilon + \varphi(y,u), \tag{27}$$

the filtered version of $\varphi(y,u)$, *guarantees that all signals are bounded, and the state estimation error* $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ *and parameter error* $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ *are exponentially stable, provided that the regressor matrix* (3) *is persistently exciting, i.e.,*

$$\int_t^{t+T} \varphi^T(\tau)\varphi(\tau)d\tau \geq \alpha I. \tag{28}$$

for some $0 < \alpha$, *and* $T > 0$, *considering* $\varphi(\tau) = \varphi(y(\tau), u(\tau))$.

Proof. The smooth function $Ly + Bu$ can be written as $\varphi(y,u)\hat{\theta}$, and then get $Ly + Bu - \varphi(y,u)\hat{\theta} = 0$, if $\theta = \hat{\theta}$. In this sense, the system (1) can be represented as

$$\dot{\mathbf{x}} = A_c\mathbf{x} + \varphi(y,u)\theta, \tag{29}$$

$$y = C\mathbf{x}. \tag{30}$$

Now, taking $\varphi = \varphi(y,u)$ and considering (25) such that $\hat{\mathbf{x}}$ is meant to be an estimate of $\mathbf{x}$, we define the error signal

$$\xi(t) = \tilde{\mathbf{x}} - \Upsilon\tilde{\theta}. \tag{31}$$

where $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$.

The derivative of the previous equation represents the error signal dynamics, which are

$$\dot{\xi}(t) = (A_c - KC)\xi, \tag{32}$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma\Upsilon^T C^T C(\xi + \Upsilon\tilde{\theta}) = -\Gamma\Upsilon^T C^T C\Upsilon\tilde{\theta} - \Gamma\Upsilon^T C^T C\xi.$$

It follows that ξ is exponentially stable, as the matrix $A - KC$ is designed to be Hurwitz. Moreover, Υ must be bounded as is obtained from a stable filtering of φ, that is also bounded.

Now, it can be proven [5, 10] that under a persistent excitation condition (28) the origin of the system

$$\dot{\chi} = -\Gamma\varphi^T\varphi\chi \tag{33}$$

is exponentially stable. It follows that the homogeneous part of (33) is also exponentially stable. So, finally, $\lim_{t\to\infty}\tilde{\theta} = 0$.

4 Examples

In this section, two examples are given in order to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm. The first example shows how this algorithm can estimate the velocity of a DC motor without direct derivation, even when the parameters of the state equation matrices are unknown and only the output matrix is known. The second example shows how the proposed algorithm can not only estimate the velocity, but also be used for an effective parameter identification.

4.1 Velocity estimation for a DC motor

Consider a 2nd order system for a DC motor, controlled by a voltage signal $u(t)$ in the form $K_v u(t) = \tau(t)$,

$$K_v u(t) = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta \tag{34}$$

where θ is the angle of the rotor, J is the rotor inertia, b the viscous friction, K_v the gain constant for the input and $\tau(t)$ the input torque. In an observable canonical form, the model is

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & 1 \\ -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}}^{A} \mathbf{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{J} \end{bmatrix}}^{B} u(t) \\ y &= \theta = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}^{C} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{35}$$

Consider the parameters $b = 5$, $J = 10$, $k = 5$ and $K_v = 100$. For this case, it is designed an observer for estimating the velocity when only the output measurement is available, and no information on any parameter is available. It is just known that the pair (A, C) is observable, so it can be transformed into an observable canonical form (not necessarily in any canonical form). For this case, the system (34) takes the form

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}}^{\bar{A}} \bar{\mathbf{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{J} \end{bmatrix}}^{\bar{B}} u \\ y &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\bar{C}} \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{36}$$

where we know that its observable canonical form is (35), and that the relation between $\mathbf{x}$ and $\bar{\mathbf{x}}$ is

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{J} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{37}$$

and that the angular velocity of the system $\omega = \dot{\theta}$ is $\omega = \bar{x}_2 = -\frac{b}{J}x_1 + x_2$. So, if the observer and identifier can estimate x_2, then the angular velocity can be also estimated by

$$\hat{\omega} = \hat{\bar{x}}_2 = -\frac{\hat{b}}{J}\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \tag{38}$$

and

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu = (A - LC)\mathbf{x} + Bu + Ly = \overbrace{(A - LC)}^{A_d}\mathbf{x} + \varphi(y, u)\theta \tag{39}$$

It is known that $x_1 = \theta$ and $x_2 = \dot{\theta}$. Now, we define the *desired* dynamics for the system by choosing

$$A_d = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

So, by identifying $\hat{L}$ and $\hat{B}$, the parameter relations $\frac{b}{J}$ and $\frac{k}{J}$ can be estimated by $\frac{b}{J} = -(a_{11} + l_1)$ and $\frac{k}{J} = -(a_{21} + l_2)$. By applying the transformation (38), we can estimate the angular velocity of the system.

In Fig. 1.a it can be seen how the velocity estimation $\hat{x}_2$ tends to the real velocity x_2, still when the parameters are unknown. For this simulation, the parameter adaptation is stopped at $t = 100[s]$, and then a different input signal is used in order to test the effectiveness of the estimation. In Fig. 1.b it is shown the performance of the velocity estimator after the estimation is suspended and the input changed. It can be seen that the error is practically zero.

4.2 Parametric identification of a 2nd order system

In this example we will show that the proposed algorithm is not only capable of estimate the velocity of an unknown system, but also helps to achieve a parametric identification. The system (34) will be assumed once again to have unknown parameters. For this example, let the *nominal* parameters be $b = 0.1$, $J = 10$, $k = 3$ and $K_V = 2$. For the identifier, the desired dynamics for matrix $A_c = (A - LC)$ are such that the eigenvalues are $\{-1.5, -2.5\}$, and the desired dynamics for the matrix $A_c - LC$ are chosen such that its eigenvalues are located in $\{-10, -12\}$ and $\Gamma = 10^3 I_{2\times 2}$. The training was done with a random input signal with unitary variance and zero mean, such that changes every 5s. After training, it was obtained

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 3.99 \\ 3.45 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1.0857 \times 10^{-5} \\ 0.2 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

From the nominal parameters, it is obtained that $b_1 = 0$ and $b_2 = 0.2 = \frac{K_v}{J}$, $a_{11} = -\frac{b}{J}$, $a_{21} = -\frac{k}{J}$. After training, and solving the previous equations for $\hat{b}$, $\hat{k}$ and $\hat{J}$, assuming only K_v is known, it is obtained that $\hat{J} = 10.0017$, $\hat{b} = 0.09999$ and $k = 3.0005$. It is clear that these parameters remain quite close to the real ones. In Fig. 2a it can be seen the evolution of the parameters during training, while in Fig. 2b and 2c a comparison of the parallel response of both systems is compared, with a RMS error of 0.0048.

5 Conclusions

As estimator based on adaptive observer theory for unknown (assumed observable) linear systems was presented. In particular, the application was focused on the velocity

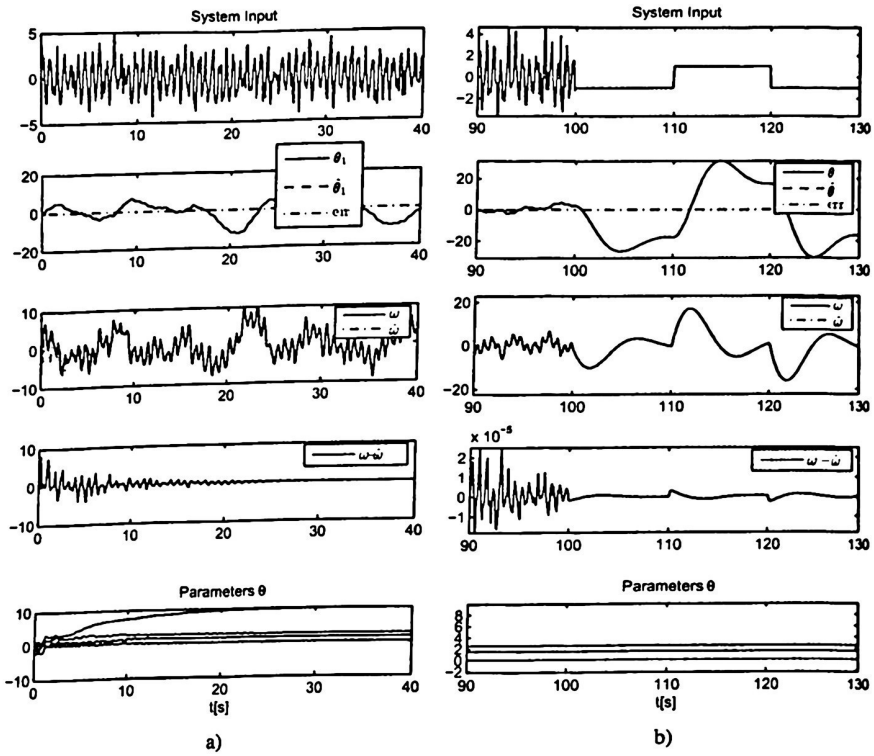


Fig. 1. Simulation results for Example 3. a) During estimation $t \in [0, 40][s]$, b) Estimation stopped at $t = 100[s]$

estimation for 2nd order mechanical systems. Two examples were shown to demonstrate the effectiveness of the method. It was also demonstrated that the method can be employed for parameter identification or velocity estimation, where only the position is assumed measurable and the parameters are unknown. The future work includes the analysis for higher order systems and experimental applications.

Acknowledgment

The authors would like to thank to PAPIIT-IN106206 UNAM and CONACyT for the support to this work.

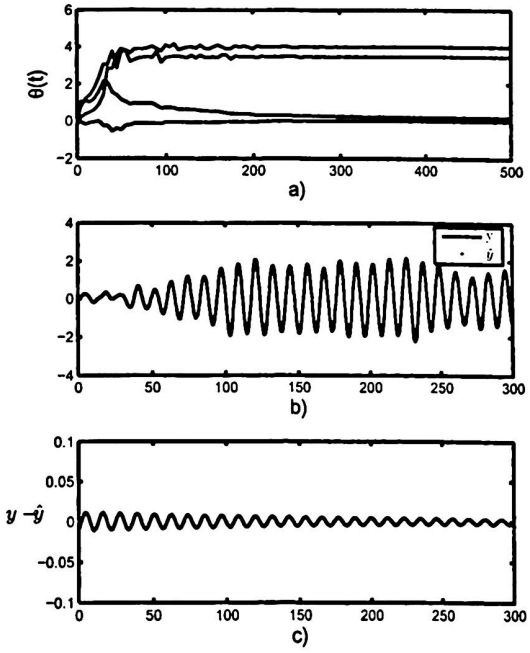


Fig. 2. Simulation results for Example 2

References

1. C. Chen, *Linear System Theory and Design.* Saunders College Publishing Philadelphia, PA, USA, 1984.
2. J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, "Second-order sliding-mode observer for mechanical systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 11, pp. 1785–1789, 2005.
3. K. Narendra and A. Annaswamy, *Stable adaptive systems*, 1989.
4. G. Zhang, B. E. Patwo, and M. Y. Hu, "Forecasting with artificial neural networks: The state of the art," *International Journal of Forecasting*, vol. 14, pp. 35–62, 1998.
5. Q. Zhang, "Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) lineartime-varying systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 3, pp. 525–529, 2002.
6. M. Gonzalez Olvera and Y. Tang, "Continuous-time recurrent neurofuzzy network for identification of a class of nonlinear systems," *IEEE-CDC*, vol. Sent for presentation. Wating for decision, 2008.

7. R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear control design: geometric, adaptive and robust*, 1996.
8. M. Tomita, T. Senjyu, S. Doki, and S. Okuma, "New sensorless control for brushless DC motors using disturbanceobservers and adaptive velocity estimations," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 2, pp. 274–282, 1998.
9. P. Belanger, P. Dobrovolny, A. Helmy, and X. Zhang, "Estimation of Angular Velocity and Acceleration from Shaft-Encoder Measurements," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 17, no. 11, p. 1225, 1998.
10. K. Narendra and A. Annaswamy, *Stable adaptive systems*. Prentice Hall, 1989, ch. 2, p. 74.

Control de Procesos

Modelado e Identificación del Proceso de Sulfato Reducción en el Tratamiento Biológico de Aguas Residuales

Jorge Lenin Ruiz *, Jaime A. Moreno **
German Buitrón y Jaime González

Instituto de Ingeniería,Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacán México DF.

Resumen *En algunos efluentes de origen industrial y doméstico están presentes contaminantes tales como el sulfato y compuestos azufrados,que tienen efectos nocivos para el medio ambiente. Por esto que se hace necesario implementar un tratamiento adecuado para remover dichos contaminantes. Un método adecuado para este propósito es la remoción biológica de sulfatos, cuya primera etapa es la sulfato reducción, en la que el sulfato se reduce a sulfuro por acción de las bacterias sulfato reductoras y el lactato. En este trabajo se analiza el modelado de dicho proceso y se desarrolla una metodología para la identificación de los coeficientes de producción y las tasas de crecimiento. Posteriormente se valida dicho modelo, comparando resultados de simulación con datos de cinéticas experimentales.*

1. Introducción

La remoción biológica de sulfatos es un tratamiento económicamente atractivo con respecto a los tratamientos físico-químicos costos. Una metodología para la remoción de sulfatos se basa en dos etapas. En la primera etapa (desasimilatoria) el sulfuro es producido por la reducción de compuestos azufrados en condiciones anaerobias generalmente por bacterias sulfato reductoras. Posteriormente el sulfuro producido en la primera etapa es biológicamente oxidado por bacterias sulfuro oxidantes y convertido en azufre elemental[6].

El proceso siempre lleva aunado un grado de incertidumbre y los parámetros del modelo del proceso suelen no ser constantes para periodos grandes de tiempo, debido a variaciones metabólicas y variaciones fisiológicas[7]. Es por ello que aunado al desarrollo de un modelo que describa cualitativamente el proceso de sulfato reducción con la finalidad de emplearlo posteriormente para controlar la remoción biológica de sulfatos es necesaria una metodología para la identificación de parámetros de las tasas de crecimiento y los coeficientes de producción del modelo del proceso de sulfato reducción.

* JruizM@iingen.unam.mx
** JMorenoP@pumas.iingen.unam.mx.

M.A. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 107-116

Existen modelos matemáticos para la sulfato reducción[5],que emplean valores de sus parámetros tomados de la literatura o de exprimentos previamente realizados. La determinación de los parámetros de las tasas de crecimiento y coeficientes de producción generalmente se realiza por medio de experimentos en los que se usan reactores a escala[10]. El procedimiento usual consiste en hacer funcionar los reactores dentro de un intervalo de concentraciones de sustrato del efluente, utilizando datos en condiciones estacionarias para obtener los parámetros.

Se emplea un quimióstato para obtener los coeficientes de producción y las tasas de crecimiento,que pueden determinarse por mediciones en el efluente. Sin embargo, esto se emplea para determinaciones en cultivos puros[9]. Buisman [2] estudio la influencia del coeficiente de crecimiento a distintos valores de sustrato inicial en el proceso de manera experimental, sin embargo no considera el efecto de los parámetros de las tasas de crecimiento.

Los parámetros de las constantes de afinidad pueden obtenerse de manera gráfica por medio de la pendiente de la recta (coeficiente de producción) que pasa por los puntos correspondientes a los datos experimentales (sustrato medido) cuya ordenada al origen es igual a la constante de afinidad [10], sin embargo este método tiene un alto grado de incertidumbre,el cual puede reducirse mediante un metodo analitico para la obtención de las tasas decrecimiento. Por lo anterior y debido a que no se ha propuesto un metodo analitico para la determinacion de los coeficientes de las tasas de reacción, el objetivo del presente trabajo es generar una metodologia para la identificación de parámetros de las tasas de crecimiento del proceso de sulfato reducción que aunado a un modelo matemático describa el proceso con la finalidad de emplearlo con propositos de control.

2. Modelado Matemático de la Sulfato Reducción

La sulfato reducción se llevó a cabo de manera experimental en un reactor discontinuo secuencial piloto de laboratorio con un volumen de trabajo de 2 L. La alimentación y purga del agua tratada se llevó a cabo a través de bombas peristálticas. El mezclado se realizó mediante un agitador controlado a través de una computadora. La temperatura se controló mediante la recirculación del agua a través de la doble pared del reactor.

Se parte de la suposición de que el contenido dentro del reactor se encuentra completamente mezclado tanto en la fase líquida como en la fase gaseosa. El sulfuro se produce por la reacción de lactato con el sulfato en presencia de bacterias sulfato reductoras, el volumen del reactor es constante, el proceso es del tipo anaerobio (se produce en ausencia de oxígeno).

El consorcio de lodos activados se analiza como una biomasa homogénea, con una única tasa de crecimiento y mortalidad dependiente de las concentraciones de lactato y sulfato. Se considera que la concentración de sustratos en el influente es constante y conocida, todos los parámetros se suponen positivos.

Bajo las consideraciones y simplificaciones anteriores se genera un modelo que describe la dinámica del proceso de sulfato reducción partiendo de la siguiente ecuación bioquímica:

$$2CH_3CHOHCOO + 3SO_4 \rightarrow 6CO_3 + 3HS + H \tag{1}$$

El lactato ($CH_3CHOHCOO$) reacciona bioquímicamente con el sulfato (SO_4) para producir sulfuro (HS), por lo que es necesario plantear un sistema que represente la dinámica del sulfato (SO_4), biomasa(X), sulfuro (HS) y lactato ($CH_3CHOHCOO$). La ecuación para el sulfato (SO_4) es:

$$\frac{dS_{so_4}}{dt} = -\mu\frac{X}{Y_1} \tag{2}$$

El término negativo de $\mu\frac{X}{Y_1}$ indica que existe consumo de sulfato (SO_4). Debido a que se modela un reactor discontinuo (batch), no existe entrada ni salida de caudal del reactor en donde se lleva a cabo la reacción, por lo que la tasa de dilución es cero. El balance de materia para el sulfuro es:

$$\frac{dS_{HS}}{dt} = \mu\frac{X}{Y_2} \tag{3}$$

El signo positivo del término$\mu\frac{X}{Y_2}$indica que existe producción de sulfuro (HS). La ecuación para la biomasa debido a que no se adiciona en el influente es:

$$\frac{dX}{dt} = X\mu \tag{4}$$

El balance de materia para el lactato es:

$$\frac{dS_L}{dt} = -\mu\frac{X}{Y_3} \tag{5}$$

La tasa de crecimiento para el modelo de sulfato reducción es:

$$\mu = \frac{\mu_{max}S_L}{K_L + S_{so_4}}\frac{So_4}{K_{so_4} + S_{so_4}} \tag{6}$$

3. Identificación de Parámetros

El proceso de identificación para la sulfato reducción se basa en encontrar el valor de los parámetros de la tasa de crecimiento y los coeficientes de producción máximos presentes en el modelo de la sulfato reducción (ecuaciones 2-6). Se considera que es posible medir el sulfuro, el pH, la cantidad de sulfato y lactato, así como la biomasa al inicio y al final de cada ciclo.

Parámetro	Descripción	Unidades
Y	Coeficiente de producción máxima	mol S/mol Xh
μ_{max}	Tasa de crecimiento máxima	h^{-1}
K_{so_4}	Coeficiente de afinidad del sulfato	mol/L
K_L	Coeficiente de afinidad del lactato	mol/L
S_{so_4}	Concentración de sulfato	mol/L
S_L	Concentración de lactato	mol/L
S_{HS}	Concentración de sulfuro	mol/L
X	Concentración de Biomasa	mol/L

Cuadro 1. Unidades de los parametros del modelo de la sulfato reducción

3.1. Coeficientes de producción

Del modelo de la sulfato reducción (2-6) es posible obtener el coeficiente de producción máximo del sulfuro. La variación del sulfuro y de la biomasa involucra la tasa de crecimiento en sus ecuaciones (3 y 4), por lo que es posible despejarla de ambas ecuaciones y posteriormente formular una igualdad con el objetivo de no involucrar la tasa de crecimiento. De la ecuación (3) se despeja el valor de la biomasa multiplicada por su tasa de crecimiento que al igualarla con la ecuación (4) y al integrarla se obtiene:

$$\int_{t_0}^{t} Y_3 \frac{S_{HS}}{dt} = \int_{t_0}^{t} \frac{dX}{dt} \tag{7}$$

Resolviendo la integral se obtiene:

$$Y_3[S_{HS}(t) - S_{HS}(t_0])dt = X(t) - X(t_0) \tag{8}$$

Se puede observar que con la ecuación (8) se puede determinar el valor del coeficiente de producción del sulfuro (Y_3) sin tener que emplear el valor de la tasa de crecimiento. De la ecuación (8) es posible obtener el valor de (Y_3) debido a que el valor del sulfuro puede cuantificarse de manera experimental al igual que el valor de la biomasa al inicio y final de cada ciclo.

$$Y_3 = \frac{X(t) - X(t_0)}{S_{HS}(t) - S_{HS}(t_0)} \tag{9}$$

De manera análoga es posible encontrar los valores de los coeficientes Y_1 (lactato) y Y_2 (sulfato) empleando sus respectivas ecuaciones (5 y 2) relacionadas con el lactato y sulfato.

3.2. Parámetros de la Tasa de Crecimiento

Para poder identificar los parámetros de la tasa de crecimiento se plantearon experimentos para desacoplar los efectos de los reactivos en el sistema aprovechando su estructura matemática. Dichos experimentos se fundamentan en que la tasa

de crecimiento (μ) dada por la ecuación (6) tiene una estructura matemática que permite simplificar la expresión al realizar una serie de consideraciones sobre los elementos relacionados en esta ecuación.

Para un valor elevado de la concentración de sulfato (S_{so_4}) con respecto a su constante de afinidad (K_{so_4}), la expresión que lo involucra junto con su constante de afinidad (K_{so_4}) tiende a un valor unitario debido a que dicha constante de afinidad no provoca un efecto considerable ante altas concentraciones de sulfato, para el lactato sucede algo similar debido a que tiene la misma estructura.

Considerando lo anterior se proponen experimentos con los cuales es posible obtener los parámetros ((K_{so_4}), K_L, y (μ_{max}) adecuadamente. Se proponen dos experimentos con los cuales se identifican los coeficientes de afinidad para el lactato y sulfato, considerando como reactivo limitante al sustrato de la constante de afinidad bajo estudio.

En un experimento se suministro un valor elevado de lactato con respecto a su constante de afinidad K_L provocando con esto que la expresión de lactato tienda a un valor unitario simplificando la expresión de la tasa de crecimiento (ecuación 6). Debido a lo anterior la tasa de crecimiento para identificar la constante de afinidad de sulfato se expresa por la siguiente ecuación:

$$\mu = \mu_{max} \frac{So_4}{K_{so_4} + S_{so_4}} \tag{10}$$

Para encontrar los parámetros de la tasa de crecimiento máxima (μ_{max}) y la constante de afinidad del sulfato se resuelve la ecuación diferencial que involucra al sulfato de la siguiente manera:

$$\frac{dS_{so_4}}{dt} = -\mu \frac{X}{Y_1} \frac{So_4}{K_{so_4} + S_{so_4}} \tag{11}$$

En esta ecuación asumiendo que la biomasa (X) es constante, es posible resolverla integrando ambos lados de la ecuación:

$$-\mu_{max} \frac{X}{Y_1} \int_{t_0}^{t} dt = \int_{so_4(t_0)}^{so_4(t)} \left(\frac{K_{so_4} + S_{so_4}}{So_4}\right) dS_{so_4} \tag{12}$$

Es posible simplificar esta expresión aprovechando las propiedades de la derivada para generar la siguiente ecuación,resolviendo las integrales reordenando y aplicando propiedades de los logaritmos se genera la siguiente expresión:

$$-\mu_{max} \frac{X}{Y_1} t = K_{so_4} \ln \left[\frac{S_{so_4}(t)}{S_{so_4(t_0)}}\right] + S_{so_4}(t) - S_{So_4}(t_0) \tag{13}$$

En esta ecuación se puede observar que es posible obtener el valor de la constante de afinidad para el sulfato (So_4), debido a que se conocen los valores iniciales y finales de sulfato, el valor final de la biomasa, y el coeficiente de producción (calculado anteriormente).

Para distintos instantes de tiempo es posible formular un sistema de ecuaciones y ponerlo en la forma $Y(t) = \psi^T(t)\theta$, el cual puede resolverse de manera

numérica empleando el algoritmo de identificación de mínimos cuadrados lineales del cual se obtiene el valor de los parámetros con un error porcentual mínimo.

El segundo experimento consiste en dar las condiciones necesarias para que el lactato sea el reactivo limitante, haciendo que la expresión del sulfato tienda a un valor unitario, el proceso de identificación es análogo al de el sulfato.

En resumen el método de identificación de los parámetros de la tasa de crecimiento consiste de dos experimentos en los cuales se dan las condiciones para que uno de los reactivos sea el reactivo limitante y sea posible identificar su constante de afinidad asociada, así como su tasa de crecimiento máxima al considerar solo los efectos de un solo reactivo involucrado.

4. Etapa Experimental

La validación del modelo se realizó por medio de la comparación de resultados de simulación contra experimentos que reproducen las cinéticas del proceso de sulfato reducción ([4],[8]), dichos experimentos se realizaron en el Laboratorio de Bioprocesos Ambientales del Instituto de Ingeniería UNAM. Para la remoción de sulfatos del agua residual se utilizaron lodos anaerobios capaces de reducir el sulfato a sulfuro aclimatados con medios utilizados en estudios previos [3], modificados en la cantidad de nitrógeno total y fósforo total para que realicen la sulfato reducción.

Dichos lodos son granulares y provienen de un reactor UASB de una planta de tratamiento de aguas residuales de una industria cervecera. La estrategia de aclimatación de la biomasa es mediante el suministro de cantidades iguales en concentración de sulfato al reactor durante varios ciclos de operación. Una vez que el sulfato suministrado sea consumido, se le adiciona nuevamente la misma concentración, hasta obtener tiempos de degradación muy similares.

La variación del tiempo de degradación entre los ciclos es la variable a considerar para determinar que la biomasa está aclimatada al sulfato. Es decir, se considera aclimatada la biomasa cuando el tiempo de degradación de los ciclos ya no varíe significativamente.

El control del factor pH se mantuvo por medio de la adición de una solución buffer. Se determinó la concentración de sulfatos, sulfito, sulfuro, materia orgánica y de ácidos grasos volátiles (AGV). Se determinaron los sólidos suspendidos y el carbono orgánico de acuerdo con los métodos estándar [1]. El sulfuro se determinó a partir del método HACH. Los sólidos suspendidos volátiles,sólidos suspendidos totales y sólidos suspendidos fijos en el lodo se determinaron por el método gravimétrico descrito en los métodos Estándar [1].Una vez aclimatado el lodo y cuantificados el sulfuro, el sulfato y la biomasa es posible realizar los experimentos para la identificación de parámetros. Los resultados obtenidos al realizar el proceso de sulfato reducción se muestran en las siguientes tablas y graficas:

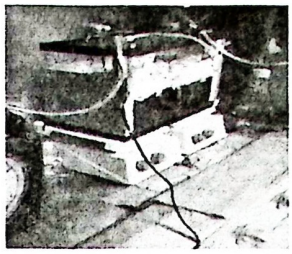


Figura 1. Reactor piloto para la aclimatación sulfato reductora.

Tiempo(H)	Lactato(mg/L)	pH(H^+])	Sulfato(mg/L)
0	2927	6.93	500
0,32	2877	7,06	464.4
1,40	2820	7.34	263
2,15	2784	7.47	236.8
2,65	2812	7.54	212.2
3,15	2851	7.62	202.2
4,65	2799	7.77	189.60
5,65	2802	7.82	159.2

Cuadro 2. Primer Cinética 09/05/07 DQO/SO42=6(954)

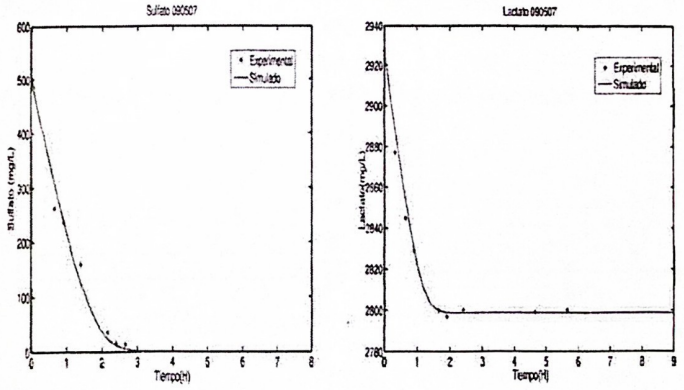


Figura.2. Graficas de la cinética del 9 de mayo del 2007.

Como se puede observar en la figura anterior, la cantidad de sulfuro se ha consumido en su totalidad a las tres horas. El lactato no se consume en su totalidad debido a que se encuentra en mayor cantidad que el sulfato y al consumirse todo

el sulfato el lactato en exceso no se consume ya que es necesaria una cantidad de sulfato para que exista un consumo de lactato.

Tiempo(H)	Lactato(mg/L)	pH(H^+)	Sulfato(mg/L)
0	10599	6.97	1500
1	9448	7,49	1013
2	9079	7.81	270.8
3	7392	8.01	78.4
4	6921	8.18	39
5	6868	8.28	27
6	6336	8.25	7.8

Cuadro 3. Segunda Cinética 19/05/07 DQO/SO42-=8

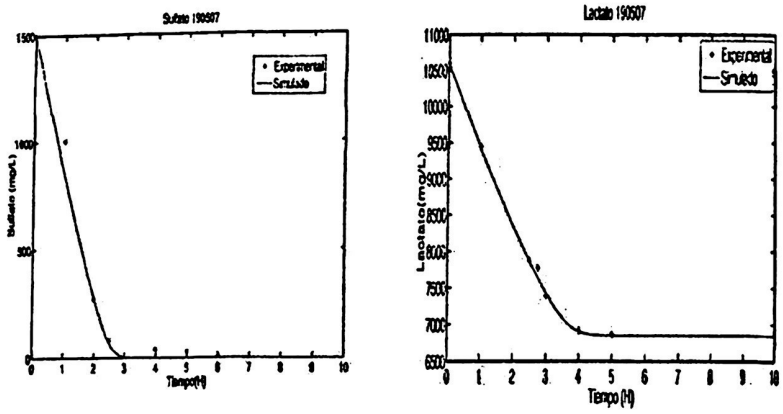


Figura.3. Graficas de la cinética del 19 de mayo del 2007.

Tiempo(H)	Lactato(mg/L)	pH(H^+)	Sulfato(mg/L)
0	15800	7.09	2000
,5	15790	7,08	1498
1	15760	7.19	1446
2	15510	7.35	1295
3	15380	7.44	1202
4	15360	7.5	691
5	15320	7.58	458
6	15260	7.63	148

Cuadro 4. Tercer cinética 06/09/07 DQO/SO42-=8

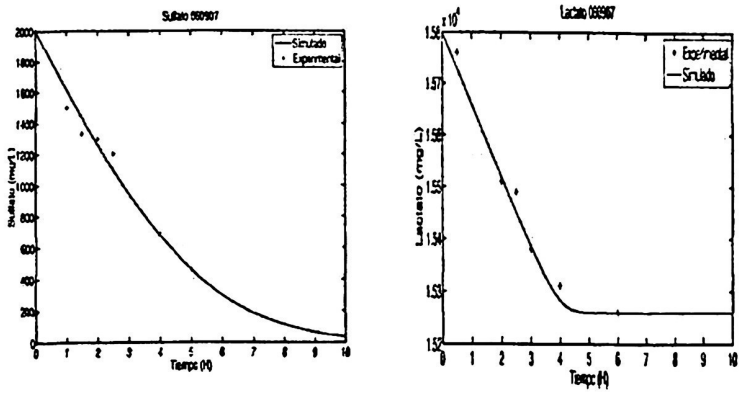


Figura.4. Graficas de la cinética del 6 de septiembre del 2007.

grafica	Cinética	DQO	Sulfato	K_{S_O4}	μ_{max}	K_L
L/S_O4	Fecha	mg/L	mg/L	mgS/L	mgS/mgSSV	mg/L
Lac	09/05/07	2926.8	500	92	0.24	14.6
Sul	09/05/07	2926.8	500	253	0.24	14.6
Lac	19/05/07	10599.3	1500	102	0.2976	14.6
Sul	19/05/07	10599.3	1500	102	.2976	14.6
Lac	06/09/07	15800	2000	102	0.2976	3900
Sul	06/09/07	15800	2000	1002	0.224	3900

Cuadro 5. Valores de los parámetros de las cinéticas

5. Conclusiones

En conclusión se puede observar que el modelo propuesto para describir la etapa sulfato reductora reproduce las diferentes cinéticas obtenidas de manera experimental que se generan al introducir diferentes relaciones iniciales de sulfato y lactato. Cabe destacar que al consumirse el sulfato en su totalidad el lactato introducido en exceso no continua consumiéndose, ya que es necesaria una cantidad de sulfato para que se consuma el lactato tal como se refleja en las graficas ilustradas anteriormente. Los parámetros obtenidos varían dependiendo la relación sulfato/lactato introducida en cada caso pero el comportamiento cualitativo del sistema predomina en cada uno de los experimentos.

6. Agradecimientos

Los autores agradecen a DGAPA UNAM, al CONACYT y al personal de Laboratorio de Bioprocesos Ambientales del Instituto de Ingeniería por su apoyo en la realización de este trabajo. Este proyecto ha sido financiado por los proyectos PAPIIT IN-112207 y CONACYT 51244.

Referencias

1. APHA., AWA.,WPCF.:Standard Methods for the Examination of Water and Wastewater. American Public Health Association, Washington, U.S.A.(1995)
2. Buisman, C., Ijspeert, P., Hof, A., Janssen, A.J.H.,Lettinga, G.,: Kinetic Parameters of a Mixed Culture Oxidizing Sulfide and Sulfur Oxygen. Biotechnology and Bioengineering. 38, 813-820.(1991).
3. Celis, M.,:Bioeliminación de Óxidos de Azufre de Efluentes. Tesis de Doctorado en Biotecnología, UAM-Iztapalapa(2004)
4. González-Martínez,J.,Moreno,G.,Moreno J.A.,Buitrón G.: Enrichment of Sulfate Reducing Bacteria in a Sequencing Batch Reactor with the Manipulation of the COT/SO4-2 Ratio and High Sulfide Concentrations. In:11th World Congress Anaerobic Digestion Bio-energy for our future,pp. 81–87.Brisbine Australia(2007)
5. Kalyuzhnyi,P.,Lettinga,G.:Mathematical Modeling as a Tool to Study Population Dynamics Between Sulfate Reducing and Methanogenic Bacteria.Biotechnology and Bioengineering.9,187-199(1998)
6. Lens, P., Kuenen, J.:The Biological Sulfur Cycle:Novel Opportunities For Environmental Biotechnology.Water Science and Technology.44,57-66(2001)
7. Lens, P.,Hulshoff,L.,Lettinga, G.,Stams,A.:Anaerobic Treatment of Sulfate Rich Wastewaters .Biodegradation.9,213-224(1998)
8. Martínez, G.,González J.,Moreno, G.,Buitrón, G.:Tratamiento de Aguas Contaminadas con Sulfato Mediante Bacterias Sulfato Reductoras y Sulfuro Oxidantes. In:Congreso Nacional de Biotecnología y Bioingeniería,pp.28–36.Sociedad Mexicana de Biotecnología y Bioingeniería A.C,Morelia,Michoacán (2007).
9. Melcalf.,Eddy.:Wasterwater Engineering Treatment and Reuse. Mc.Graw-Hill,USA,(2003)
10. Reis, M., Almeida,J.,Lemos,P.,Carrondo,M.:Effect of Hydrogen Sulfide on Growth of Sulfate Reducing Bacteria.Biotechnology and Bioengineering.40,593-600(1986)

Dissipative Observer Design for bioprocesses

Jaime A. Moreno*

Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México D.F., Mexico
JMorenoP@ii.unam.mx

Abstract. Recently, the author has proposed a methodology for the design of nonlinear observers based on the dissipative theory. This methodology offers a systematic approach to the observer design providing great flexibility and generality. For example, several well known observer design methods, as the High-Gain and the Lipschitz Observers, can be treated and generalized in a unified manner by the Dissipative Approach. Moreover, different objectives in observation can be also unified and generalized by the Dissipative Approach, as for example the design of Unknown Input and Robust Observers. The objective of this paper is to show how this methodology can be applied in the design of observers for bioprocesses and its advantages for this kind of processes. An example illustrates the main ideas.

1 Introduction

Reaction systems is a class of nonlinear dynamical systems that is widely used in areas such as chemical, biochemical and biomedical engineering, biotechnology, ecology, etc. (Robust) observation issues for this class of systems is of fundamental importance due to the limited availability of on-line sensors and the uncertainties related, in particular, to the mathematical model. It is not surprising that there is an intensive research activity to design observers (or software sensors) for these systems ([1–3]), and different methods for uncertain reaction systems, besides the classical extended Kalman and Luenberger observers, have been proposed (for an overview see [2]): Interval Observers ([4]) are based on cooperative systems theory; Adaptive Observers ([3]) assume that the uncertainties are represented by unknown parameters; Asymptotic Observers ([1, 2]) are based on the mass and energy balances without requiring the process kinetics; Practical and Parallelotopic Observers ([5]) consider uncertainties as *unknown inputs (UI)* and converge practically (not exactly) to the true state for a restricted class of systems with bounded perturbations.

For reaction systems without uncertainties several methods have been applied to design observers, as the High-Gain method ([6]) and the Lipschitz Method ([7]). For uncertain reaction systems, when there are only parametric uncertainties, adaptive observers can be used. However, if stronger structural uncertainties are available the most successful method used to day are the asymptotic

* This work was supported in part by DGAPA-UNAM, project PAPIIT IN112207, and CONACyT, Project 51244.

M.A. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 117-126

observers ([1, 2]). In the work ([8]) uncertainties are represented by *arbitrary unknown input signals* to the system, what represents a flexible way to characterize many kinds of uncertainties, and they are able to show that the asymptotic observers can be recovered and extended with their approach. A highly satisfactory result is to be able to explain, using observability/detectability arguments, why (classic) asymptotic observers converge and why their convergence rate is not assignable. Moreover, the robust observers proposed in that work can be used in more general situations and their convergence properties are completely derived from the robust observability/detectability properties of the model.

However, due to the basic linear structure of the uncertain systems considered in ([8]), it is not possible to consider more general situations. For example, if some reaction rates are known but others are uncertain, this leads to a nonlinear structure with unknown inputs, that cannot be treated with that approach. So a natural extension of that work is to use unknown input observer design methods for uncertain reaction systems, and this is part of the objective of this paper.

The use of systems with unknown inputs for the representation of the uncertain reaction system's family leads naturally to the study of observability and detectability concepts for this kind of systems, and the construction and existence conditions of *Unknown Input Observers (UIO)*. For linear time invariant (LTI) systems this is a very well established topic ([9]), and some advances in the design of UIOs for nonlinear systems have been obtained recently ([10, 11])

Recently, the author has proposed ([12, 13]) a method to design nonlinear observers using dissipative methods. One attractive feature of this Dissipative Design is, on the one side, that it includes and generalizes many current observer design methods, and on the other side, that it is possible to design observers with unknown inputs or known inputs in a unified framework. The aim of this work is to show how the Dissipative Design Method can be used to design observers for reaction systems with or without uncertainties in a unified way. This can be seen as a first step in a more general, and far-reaching objective: to develop a methodology to design robust observers for uncertain reaction systems, in which different kinds of uncertainties are available as unknown constant parameters, unknown (bounded) disturbances, unmodeled dynamics, deterministic perturbations characterized by an internal model, etc. We believe that the Dissipative Design Method is able to reach these requirements, and this is part of active research work.

2 Dissipative observer design

Motivated by the circle criterion design of nonlinear observers in [14] the author has proposed in [12, 13] a methodology for designing nonlinear observers for a class of nonlinear systems. This method will be briefly reviewed in this section.

2.1 Preliminaries

From the dissipativity theory ([15]) the following results are of relevance here. Consider the feedback interconnection

$$\dot{x} = Ax + Bu \ , \ y = Cx \ , \ u = -\psi(t,y) \ , \tag{1}$$

with $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^m$, and quadratic *supply rates* $\omega(v,w) = v^T Q v + 2v^T S w + w^T R w$, where $v \in \mathbb{R}^r$, $w \in \mathbb{R}^s$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $S \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $R \in \mathbb{R}^{s\times s}$, and Q, R symmetric. The linear part (A,B,C) of system (1) is said to be *state strictly dissipative (SSD)* with respect to the supply rate $\omega(y,u)$, or for short (Q,S,R)-SSD, if there exist a matrix $P = P^T > 0$, and $\epsilon > 0$ such that

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & , PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0 \ . \tag{2}$$

For quadratic systems, i.e. $m = q$, passivity corresponds to the supply rate $\omega(y,u) = y^T u$. Note that this definition assures the existence of a quadratic positive definite *storage function* $V(x) = x^T P x$ such that along any trajectory of the system $\dot{V}(x(t)) \leq \omega(y(t), u(t)) - \epsilon V(x(t))$.

The nonlinear part of system (1), a time-varying memoryless nonlinearity $\psi : [0,\infty)\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$, $u = \psi(t,y)$, piecewise continuous in t and locally Lipschitz in y, such that $\psi(t,0) = 0$, is said to satisfy a dissipative condition in Γ with respect to the supply rate $\omega(u,y)$, or for short (Q,S,R)-D in Γ, if $\omega(u,y) = \omega(\psi(t,y),y) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, $\forall y \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$, where Γ is a subset of $\mathbb{R}^m$ whose interior is connected and contains the origin. If $\Gamma = \mathbb{R}^m$, then ψ satisfies the dissipativity condition globally, in which case it is said that ψ is dissipative with respect to ω, or for short, (Q,S,R)-D.

Note that the classical sector conditions ([16]) for square nonlinearities, i.e. $m = q$, can be represented in this form. If ψ is in the sector $[K_1, K_2]$, i.e. $(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0$, then it is (Q,S,R)-D, with $(Q,S,R) = \left(-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}\left(K_1^T K_2 + K_2^T K_1\right)\right)$. If ψ is in the sector $[K_1, \infty]$, i.e. $(y - K_1 u)^T u \geq 0$, then it is $\left(0, \frac{1}{2}I, -\frac{1}{2}\left(K_1 + K_1^T\right)\right)$-D.

For the interconnected system (1) a generalization of the passivity and of the small gain theorems for non square systems can be easily obtained, and it will be used in the sequel.

Lemma 1. *Consider the system (1). If the linear system (C,A,B) is $\left(-R, S^T, -Q\right)$-SSD, then the equilibrium point $x = 0$ of (1) is globally (locally) exponentially stable for every (Q,S,R)-D (in Γ for some $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$) nonlinearity.*

2.2 Dissipative design for certain nonlinear systems

Consider the class of systems described by a LTI subsystem with a nonlinear perturbation term, connected in feedback, i.e.

$$\Sigma : \left\{ \dot{x} = Ax + G\psi(\sigma, y, u) + \gamma(t,y,u) \ , \ y = Cx \ , \ \sigma = Hx \ , \right. \tag{3}$$

or that can be brought to this form by transformations, and where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state, $y \in \mathbb{R}^p$ is the measured output, $u \in \mathbb{R}^m$ is the input, and $\sigma \in \mathbb{R}^r$ is a (not necessarily measured) linear function of the state. $\gamma(t,y,u)$ is an arbitrary nonlinear function of the input and the output. $\psi(\sigma,y,u)$ is a q-dimensional vector that depends on σ, y, u. ψ and γ are assumed to be locally Lipschitz in σ, y, u, so that existence and uniqueness of solutions is guaranteed. It will be assumed that the trajectories of interest of Σ are defined for all future times.

An *observer* for system (3) is a dynamical system Ω that has as inputs the input u and the output y of Σ, and its output $\hat{x}$ is an estimation of the state x of Σ. A full order observer for Σ of the form

$$\Omega: \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + G\psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y}-y), y, u) + L(\hat{y}-y) + \gamma(t,y,u), \\ \hat{y} = C\hat{x}\ ,\ \hat{\sigma} = H\hat{x}\ , \end{cases} \tag{4}$$

is proposed, where matrices $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$, and $N \in \mathbb{R}^{r\times p}$ have to be designed. Defining the state estimation error by $\tilde{x} \triangleq \hat{x} - x$, the output estimation error by $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$, and the function estimation error by $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$, $z \triangleq (H+NC)\tilde{x} = \tilde{\sigma} + N\tilde{y}$, and a new nonlinearity $\phi(z,\sigma,y,u) \triangleq \psi(\sigma,y,u) - \psi(\sigma+z,y,u)$, the dynamics of the error can be written as

$$\Xi: \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A_L\tilde{x} + G\nu\ , \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0\ , \ z = H_N\tilde{x}\ , \ \nu = -\phi(z,\sigma,y,u)\ , \end{cases} \tag{5}$$

where $A_L \triangleq A + LC$, and $H_N \triangleq H + NC$. $\phi(0,\sigma;y,u) = 0$ for all σ, y, u.

The observer design consists in finding matrices L and N, if they exist, so that Ξ satisfies the conditions of Lemma 1. For this it is necessary to assume that the nonlinear part of (5) belongs to one or several sectors.

Assumption 1 *ϕ in (5) is (Q_i, S_i, R_i)-dissipative (in Γ) for some finite set of non positive semidefinite quadratic forms $\omega_i(\phi,z) = \phi^T Q_i\phi + 2\phi^T S_i z + z^T R_i z \geq 0$, for all σ, y, u, for $i = 1, 2, \cdots, M$.*

It is clear that it is necessary that the quadratic forms be independent. It is also easy to see that then ϕ is $\sum_{i=1}^{M}\theta_i(Q_i,S_i,R_i)$-dissipative (in Γ) for every $\theta_i \geq 0$, i.e. ϕ is dissipative with respect to the supply rate $\omega(\phi,z) = \sum_{i=1}^{M}\theta_i\omega_i(\phi,z)$. In this case the design is as follows

Theorem 2. *Suppose that Assumption 1 is satisfied. If there are matrices L and N, and a vector $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_M)$, $\theta_i \geq 0$, such that the linear subsystem of Ξ is $(-R_\theta, S_\theta^T, -Q_\theta)$-SSD, with $(Q_\theta, S_\theta, R_\theta) = \sum_{i=1}^{M}\theta_i(Q_i,S_i,R_i)$, that is there exist a matrix $P = P^T > 0$, and $\epsilon > 0$ such that*

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R_\theta H_N\ , & PG - H_N^T S_\theta^T \\ G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq 0\ , \tag{6}$$

where $A_L = A + LC$, $H_N = H + NC$. Then Ω is a global (local) exponential observer for Σ, i.e. there exist constants $\kappa, \mu > 0$ such that for all $\tilde{x}(0)$ (in a vicinity of $\tilde{x} = 0$) $\|\tilde{x}(t)\| \leq \kappa\|\tilde{x}(0)\|\exp(-\mu t)$.

The proposed method generalizes and improves several methods previously proposed in the literature ([12]): (i) The Circle criterion design ([14]): our design is valid for non-square systems, the nonlinearities are of general type, and can be described by several sector conditions. (ii) Lipschitz observer design [7], and (iii) High-Gain observer design [6].

2.3 Dissipative design for uncertain nonlinear systems

One alternative to model uncertain systems consists in considering the uncertainties as completely unknown inputs to the system. The class of nonlinear systems considered for UIO design is

$$\Sigma : \left\{ \dot{x} = Ax + G\psi(\sigma, y, u) + \gamma(t, y, u) + Bw \ , \ y = Cx \ , \ \sigma = Hx \ , \right. \quad (7)$$

where $w \in \mathbb{R}^q$ is an arbitrary (even unbounded) unknown input. w can model an arbitrary unknown disturbance acting on the system, parametric uncertainty or unmodeled dynamics. It will be assumed that the trajectories of Σ exist and are well defined for all times, i.e. there are no finite escape times. Without loss of generality it is assumed that matrices B and C are of full rank.The objective is to design an *Unknown Input Observer (UIO)* for system Σ (7), that is, a dynamical system that using the information of the known input $u(t)$ and the output $y(t)$ produces an state estimate $\hat{x}(t)$, that converges asymptotically to the actual state $x(t)$ of Σ, i.e. $\lim_{t\to\infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$, in spite of the lack of information on the unknown input w and derivative(s) of output y.

The main result of [17, 10] is a sufficient condition for the existence of an UIO for the plant Σ (7).

Theorem 3. *Suppose that Assumption 1 is satisfied, and that there exist constant matrices $P = P^T > 0$, L, N, $\mathbb{S}$, a vector $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_M)$, $\theta_i \geq 0$, and a constant $\epsilon > 0$, such that ($\bigstar$ represent the symmetric terms)*

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R_\theta H_N & \bigstar & \bigstar \\ G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta & \bigstar \\ B^T P - \mathbb{S}C & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \ .$$

Then there exists an UIO for (7).

As it is shown in the references if this conditions are satisfied there are state $\chi = Tx$ and output transformations such that in the new coordinates the system has the form

$$\dot{\chi}_1 = \bar{A}_{11}\chi_1 + \bar{A}_{12}\chi_2 + \bar{G}_1\psi(\sigma, y, u) + \bar{\gamma}_1 - B^T PBw \quad (8)$$

$$\dot{\chi}_2 = \bar{A}_{21}\chi_1 + \bar{A}_{22}\chi_2 + \bar{G}_2\psi(\sigma, y, u) + \bar{\gamma}_2 \quad (9)$$

$$y_1 = \chi_1 \ , \ y_2 = C_2\chi_2 \ , \ \sigma = H_2\chi_2 \ .$$

Note that the states affected by the unknown input (χ_1) (8) are measured, and the estimation of the rest of the states (9), that are unaffected by the unknown input (χ_2), can be performed as in the previous subsection.

Remark 1. In general (6, 3) are nonlinear matrix inequality feasibility problems. Under some conditions they become Linear Matrix Inequalities (LMI) feasibility problems, for which solutions can be effectively found by several algorithms in the literature ([18]). Note also that when (6, 3) are feasible, there exist in general several solutions for L and N. Replacing ϵP by ϵI, (3) is a LMI in P, PL, ϵ, $\mathbf{S}$, θ but not in N, except when $R_\theta = 0$ and $S_\theta = 0$. One possibility to solve (6, 3) by LMI algorithms is to fix N at some value and to search for a solution. This can be made recursively until a solution is found. A particular situation arises when $N = 0$, so that the classical output injection is made.

3 Model of (Uncertain) Reaction Systems and robust observer design

A general state-space model of reaction systems is generally obtained from mass and energy balances ([1, 2]) and can be written in a compact and generalized form as:

$$\Sigma_R : \left\{ \dot{x} = K\varphi(x) - D(t)x - Q(x) + F(t) \ , y = Cx \ . \right. \tag{10}$$

where $y \in \mathbb{R}^m$ is the output vector, the state $x \in \mathbb{R}^n$ consists of component concentrations, volumes and temperatures, $K \in \mathbb{R}^{n \times q}$ is the constant stoichiometric coefficient matrix, $\varphi \in \mathbb{R}^q$ is the reaction rate vector, D is the (matrix) dilution rate, Q is the outflow rate vector, F is the feedrate vector. For a single reactor D is a scalar but it is a matrix when several reactors are considered.

In practice the model is usually uncertain, since the parameters and nonlinearities of the system are difficult to identify precisely and they may change over time. In particular, the reaction rates are usually poorly known. This makes the observation problem challenging. In order to deal with these uncertainties a representation of all possible behaviors of the system (10) is required. In a previous work ([8]) the authors have proposed to use state-affine systems with *unknown inputs*, that is

$$\Sigma_U : \left\{ \dot{x} = A(u,y)x + Bw + \psi(u,y) \ , y = Cx \ , \right. \tag{11}$$

where $w \in \mathbb{R}^p$ is a vector of (arbitrary) unknown inputs representing uncertainties, $u \in \mathbb{R}^r$ is a vector of measured inputs, and $A(u,y)$ is a continuous matrix. In this form they have been able to explain and generalize the well known asymptotic observers, that have been shown to be very useful in many practical situations ([1, 19, 2]). They are obtained when all the reaction rates are considered uncertain, $w = \varphi(x)$, but the rest of the model is assumed to be known, i.e. the uncertain system can be represented by (11) with $A(u,y) = -D(t)$, $B = K$, $\psi(u,y) = F(t) - Q(x)$.

However, due to the basic linear structure of (11) it is not possible to consider more general situations. For example, if some reaction rates are known but others are uncertain, this leads to a nonlinear structure as the one in (7), when the uncertain reaction rates are modeled as unknown inputs. It seems also

natural to use (7) as a model for an uncertain reaction system. The dissipative method can then be used to design a robust observer. It is clear that the classic asymptotic observers are a special case of this approach. Moreover, the case that no uncertainties are present in the model can be treated in the same framework. This shows the great flexibility of the method.

Example 1. Consider the case that in system (10) some reaction rates ($\varphi_k(x)$) are well known but the rest is unknown ($\varphi_u(x)$). If it is assumed that Q, D and F are measured, and K is known, then the reaction system can be written as

$$\dot{x} = K_k\varphi_k(x) - D(t)x - Q(x) + K_u w + F(t) \ , \ y = Cx \ .$$

in which $w = \varphi_u(x)$. This system has the structure of (7).

4 Example

In order to illustrate the dissipative observer design method proposed a simple biological reactor model will be considered:

$$\dot{X} = -D(t)X + \mu(S)X \ , \ \dot{S} = D(t)(S_{in} - S) - \tfrac{1}{Y}\mu(S)X \ , \qquad (12)$$

where X is the biomass and S the substrate concentration, μ is the growth rate, Y the yield coefficient, S_{in} is the substrate concentration in the inflow and D is the dilution rate. The observation problem consists in estimating the substrate concentration S when the biomass concentration X is measured. Two extreme conditions on the knowledge of the reaction rate will be considered:
Case 1: The reaction rate μ is completely unknown.
Case 2: No uncertainty, i.e. the model is perfectly known.

4.1 Case 1: Unknown reaction rate

Case 1 is the standard situation for asymptotic observers, where μ is treated as an unknown input ([1, 2, 8]). Since there is only one reaction rate and one measurement in this example, the dissipative approach leads exactly to the classical asymptotic observer. The variable $Z = \frac{1}{Y}X + S$, whose dynamics is $\dot{Z} = -D(t)Z + D(t)S_{in}$, is independent of the reaction rate μ. The asymptotic observer

$$\dot{\hat{Z}} = -D(t)\hat{Z} + D(t)S_{in} \ ,$$

converges asymptotically to the true value of Z, independently of the value of μ, when D is persistently exciting, i.e. there exist $\alpha, T > 0$ such that for all $t \geq 0$, $\int_t^{t+T} D(\tau)d\tau \geq \alpha$. The convergence of the observer cannot be assigned and depends on the behavior of D. The detectability analysis of [8] shows that if μ is completely arbitrary no better result can be obtained.

4.2 Case 2: Known reaction rate

Consider the following observer

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}} &= -D(t)X + \mu\left(\hat{S} + N\left(\hat{X} - X\right)\right)X + l_1\left(\hat{X} - X\right) , \\ \dot{\hat{S}} &= D(t)\left(S_{in} - \hat{S}\right) - \tfrac{1}{Y}\mu\left(\hat{S} + N\left(\hat{X} - X\right)\right)X + l_2\left(\hat{X} - X\right) .\end{aligned} \tag{13}$$

The dynamics of the observation errors $e_X = \hat{X} - X$, $e_S = \hat{S} - S$ are

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{e}}_X = l_1 e_X + \phi(z,S)X \ , \ \dot{\hat{e}}_S = -D(t)e_S - \tfrac{1}{Y}\phi(z,S)X + l_2 e_X \ , \\ &z = e_S + Ne_X \ , \ \phi(z,S) = \mu(z+S) - \mu(S) \ .\end{aligned} \tag{14}$$

It is illustrative to use (e_X, z) as state variables of the error, instead of (e_X, e_S), i.e.

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{e}}_X = l_1 e_X + \phi(z,S)X \ , \\ &\dot{z} = -D(t)z + \left(N - \tfrac{1}{Y}\right)\phi(z,S)X + l_N e_X \ , l_N = Nl_1 + l_2 \ .\end{aligned} \tag{15}$$

In order to design the observer the sector of ϕ has to be determined. For continuous differentiable reaction rates μ this is easily done with the help of the mean value theorem. Since $\phi(z,S) = \frac{d\mu(S+\gamma z)}{dS} z$ for some $\gamma \in (0,1)$ it follows that $\phi(z,S)$ is in the sector $[K_1, K_2]$, where K_1 and K_2 are the minimum and the maximum value of the derivative of μ, respectively.

Two classical classes of growth rates will be considered: **The monotonic case:** The typical form is the Monod function $\mu(S) = \frac{\mu_0 S}{S+K_S}$, but other forms are possible. In this case $0 < K_1 < K_2 < \infty$. The strict positiveness of K_1 comes from the fact that in the reactor S is bounded.

The non monotonic case: The typical form is the Haldane function $\mu(S) = \frac{\mu_0 S}{S^2/K_I + S + K_S}$, but other forms are possible. In this case $K_1 < 0 < K_2 < \infty$.

It is possible to design the observer gains by solving the Matrix Inequality (6), that, in general, has many solutions, if it is feasible. Here, for illustrative purposes, a simple storage function will be selected and the design parameters will be selected to satisfy the corresponding inequality.

Consider as Lyapunov's function candidate $V(e_X, z) = \frac{1}{2}\left(e_X^2 + \theta z^2\right)$. Its derivative along the trajectories of the observation error 15 is

$$\dot{V} = l_1 e_X^2 + X\phi(z,S)e_X + \theta l_N z e_X - \theta D(t)z^2 + \theta X\left(N - \tfrac{1}{Y}\right)\phi(z,S)z \ .$$

The design is then as follows:

The monotonic case: Selecting $l_1 = \lambda_1 X$, $\theta > 0$, $l_N = \lambda_N X$ and $N < \frac{1}{Y}$, with λ_1 large enough, then $\dot{V} < -\epsilon V$ so that the observer converges exponentially fast, even when $D = 0$.

The non monotonic case: Selecting $l_1 = \lambda_1 X$, $\theta > 0$, $l_N = \lambda_N X$ and $N = \frac{1}{Y}$, with λ_1 large enough, then $\dot{V}$ is negative definite, so that the observer converges asymptotically fast, if it is assumed that $D(t) \geq \epsilon > 0$.

Many more solutions can be found solving the Matrix Inequality (6). These degrees of freedom can be used to optimize certain performance criteria. Note that setting $N = \frac{1}{Y}$ and $l_N = 0$ in the previous observer, then the asymptotic observer is recovered!

In Figure 1 some simulations illustrate the behavior of the designed observers. The growth rate is Monod and the parameters of the plant: $Y = 0.3$, $S_{in} = 10$, $\mu_0 = 0.2$, $K_S = 10$, $D = 0.4$, $X_0 = 10$, $S_0 = 5$. For both observers $\theta = 0.025$, $l_1 = -3X$, $e_{X0} = 0.5$, $e_{S0} = 10$ were used. For the asymptotic observer $N = 1/Y$ and $l_N = 0$, and for the dissipative observer $N = 1/Y - 8$, $l_N = -X/\theta$.

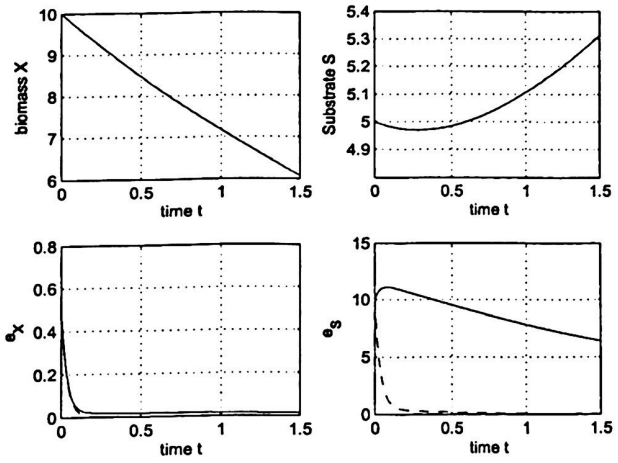


Fig. 1. Simulation of the bioreactor and the estimation errors of the asymptotic observer (continuous line) and of the dissipative observer (dotted line).

It is clear that the convergence velocity of the error of the unmeasured state (S) for the dissipative observer is much faster than that of the asymptotic observer. This is of course expected, since the model is perfectly known for the first but not for the second one. The interesting point here is that the dissipative observer methodology allows for a unified design under different uncertainty conditions.

5 Conclusions

In this work it has been shown how the Dissipative Design Method can be used to design observers for reaction systems with or without uncertainties in a unified way. Many important issues as the consideration of unknown parameters,

sensor noise, consideration of trade offs between robustness and observer performance, etc. have to be addressed and this is part of active research work. We believe that the Dissipative Design Method is a methodology able to reach these requirements.

References

1. Bastin, G., Dochain, D.: On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors. Volume 1 of Process Measurement and Control. Elsevier, Amsterdam (1990)
2. Dochain, D., Vanrolleghem, P.: Dynamical Modelling and Estimation in Wastewater Treatment Processes. IWA Publishing, London, UK (2001)
3. Dochain, D.: State observers for processes with uncertain kinetics. Int. J. Control **76**(15) (2003) 1483–1492
4. Gouzé, J.L., Rapaport, A., Hadj-Sadok, M.Z.: Interval observers for uncertain biological systems. Ecological Modelling **133**(1-2) (2000) 45–56
5. Rapaport, A., Gouzé, J.: Parallelotopic and practical observers for non-linear uncertain systems. Int. J. Cont. **76**(3) (Feb. 2003) 237–251
6. Gauthier, J.P., Hammouri, H., Othman, S.: A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. IEEE Trans. Aut. Cont. **37** (1992) 875–880
7. Rajamani, R.: Observers for Lipschitz nonlinear systems. IEEE Trans. Automatic Control **43** (1998) 397–401
8. Moreno, J.A., Dochain, D.: Global observability and detectability analysis of uncertain reaction systems and observer design. Int. J. Cont. **81**(7) (2008) 1062 – 1070.
9. Hautus, M.: Strong detectability and observers. Linear Algebra and its Applications **50** (1983) 353–368
10. Rocha-Cózatl, E., Moreno, J., Zeitz, M.: Constructive design of unknown input nonlinear observers by dissipativity and LMIs. In: 16th. IFAC World Cong., Prague (2005)
11. Moreno, J.: Unknown input observers for SISO nonlinear systems. In: Proc. 39th IEEE Conf. Dec. Cont., Sydney, Australia, (2000) 790–795
12. Moreno, J.A.: Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. In: Proc. 2nd IFAC Symp. on Syst., Struct. and Cont. SSSC2004, Oaxaca, Mexico, IFAC (2004) 735–740
13. Moreno, J.: Approximate Observer Error Linearization by Dissipativity Methods. In: Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems. Vol. 322 Lect. Notes in Cont. Inform. Scien. Springer (2005) 35–51
14. Arcak, M., Kokotovic, P.: Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis. Automatica **37**(12) (2001) 1923–1930
15. Willems, J.: Dissipative dynamical systems, part I: General theory. Archive for Rational Mechanics and Analysis **45** (1972) 321–351
16. Khalil, H.: Nonlinear Systems. 3rd ed. Prentice, Upsaddle River, N.J. (2002)
17. Rocha-Cózatl, E., Moreno, J.: Dissipativity and design of unknown input observers for nonlinear systems. In Allgoewer, F., ed.: Proc. 6th. IFAC-Symp. Nonlin. Cont. Systems (NOLCOS 2004), Stuttgart, 615–620
18. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V.: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, Philadelphia (1994)
19. Dochain, D., Perrier, M., Ydstie, B.: Asymptotic observers for stirred tank reactors. Chemical Engineering Science **47**(15/16) (1992) 4167–4177

Determinación del Valor Óptimo de Gas de Inyección para un Sistema de Producción de Petróleo Crudo mediante Redes Neuronales

G. Jiménez de la Cruz[1,2], José A. Ruz Hernández[1], Evgen Shelomov[1], Ruben Salazar Mendoza[2]

[1] Universidad Autonoma del Carmen, Av. 56 # 4 Esq. Av. Concordia, Col. Aviaciòn, C.P. 24180, Cd. Del Carmen, Campeche Mèxico, email: {jruz, eshelomov}@pampano.unacar.mx

[2] Instituto Mèxicano del Petroleo, Av. Periférica Norte # 75 Esq. Calle 35B, Col. San Agustín del Palmar, C.P. 24118, Cd. del Carmen, Campeche, México, e-mail: {gjcruz, rsalazar}@imp.mx, gjc@mexico.com

Resumen. En este artículo se propone una estrategia de optimización basada en redes neuronales. La estrategia se utiliza para determinar los valores óptimos de la tasa de inyección de gas para un sistema de producción artificial de hidrocarburos. Se analizan dos casos; en el primero, se considera un sistema de producción con gas artificial de un solo pozo y en el segundo se considera un sistema de producción compuesto por dos pozos. Para ambos casos, se minimiza una función objetivo o de costo. La estrategia propuesta pone de manifiesto la habilidad de las redes neuronales para aproximar el comportamiento de un sistema de producción de petróleo crudo y para resolver problemas de optimización cuando un modelo matemático no está disponible.

Palabras Claves: Redes neuronales, sistemas de producción de hidrocarburos, gas de inyección, optimización y perceptrón multicapa.

1 Introducción

La operación de los sistemas de producción de gas y petróleo crudo, requiere de muchas decisiones que deben tomarse afectando los volúmenes producidos y el costo de producción. Estas decisiones se toman a diferentes niveles en la organización de las empresas relacionadas con el petróleo, pero con el tiempo repercuten en el sistema físico de producción [1]. La Fig. 1 ilustra la visión general de un sistema físico de producción con gas de inyección de levantamiento. Para este tipo de sistemas de producción de petróleo crudo, las variables de decisión se relacionan para encontrar el flujo de gas de levantamiento para cada pozo que entregará un flujo máximo de producción total de petróleo crudo en un pequeño instante de tiempo.

Una función objetivo es un valor único y una función matemática bien definida que mapea los valores de las variables de decisión y se ubican dentro de una medida del comportamiento. Ejemplos de tales medidas de comportamiento son, el flujo de la producción total de petróleo crudo, el valor actual neto (ganancia) o la recuperación del yacimiento. En el esfuerzo hacia un mejor comportamiento del sistema de producción, una pregunta que comúnmente debe agregarse, consiste en decidir cuál de las decisiones será mejor para maximizar o minimizar la función objetivo.

M.A. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp.127-136

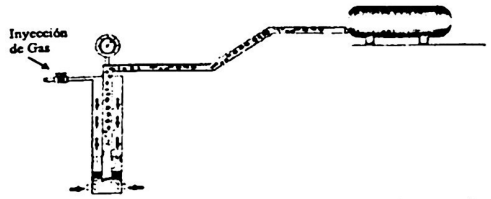


Fig. 1. Sistema de producción con gas de levantamiento de un solo pozo.

El objetivo del gas de levantamiento es incrementar la producción de Petróleo crudo o evitar el decremento de flujos en los pozos mediante la reducción de la cabeza hidrostática de la columna del fluido en el pozo [2]. Mediante la inyección de gas dentro de la tubería, la densidad del fluido disminuye en el agujero del pozo; por lo tanto, la componente de caída de presión resultante de la gravedad se reduce. Sin embargo, el gas de levantamiento también proporciona un componente más grande de caída de presión resultante de la fricción, dando una pequeño flujo de gas optimo de levantamiento para el pozo. Por lo general la disposición de gas de levantamiento para un grupo de pozos es inferior a la suma de los flujos individuales de gas óptimo de levantamiento para cada pozo. El problema de optimización con gas de inyección de levantamiento consiste en encontrar los flujos de gas de levantamiento para cada pozo entregando el flujo máximo total de producción de petróleo crudo sujeto a restricciones en la capacidad de procesamiento del gas de inyección de levantamiento y otras posibles operaciones.

En el presente trabajo, una estrategia de optimización basada en redes neuronales se desarrolló y aplicó para calcular los valores óptimos de flujos de gas de inyección y de petróleo crudo de un sistema de producción de gas de levantamiento. Se analizan dos casos; en el primero, se considera optimizar un sistema de producción con gas de levantamiento de un solo pozo y en el segundo, se considera un sistema de producción con gas de levantamiento compuesto por dos pozos. Para ambos casos se minimiza una función objetivo. La estrategia propuesta muestra la habilidad de las redes neuronales para aproximar el comportamiento de un sistema de producción de petróleo crudo y para resolver problemas de optimización cuando un modelo matemático no esta disponible.

2 Estrategia de Optimización basada en una Red Neuronal

Con el fin de resolver el problema de optimización gas-levantamiento, se desarrolló un procedimiento de optimización basado en redes neuronales que consta de dos componentes (ver Fig. 2). Las dos componentes son la red neuronal utilizada para aproximar la curva de comportamiento de gas de levantamiento y la función objetivo para satisfacer un índice de rendimiento.

El tipo de red neuronal empleado en la estrategia es del tipo Perceptrón Multicapa (MLP). Este tipo de redes neuronales presentan flexibilidad y excelentes propiedades para aproximar funciones. La siguiente ecuación se utiliza para determinar la estructura de una MLP con M neuronas en una sola capa oculta o intermedia con función de activación sigmoidal y una neurona en la capa de salida con función de activación lineal.

$$F(x_1,...,x_P)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i g(\sum_{j=1}^{p}w_{ij}x_j-\theta_i) \quad (1)$$

La mayoría de los autores e investigadores en redes neuronales han llegado a la conclusión que las redes neuronales de dos capas que utilizan funciones de activación del tipo tangente hiperbólica o de tipo sigmoidal en la capa intermedia son aproximadotes universales [3] y [4]. Las redes neuronales multicapa pueden diseñarse y entrenarse con la ayuda del Toolbox de Redes neuronales que se utiliza con Matlab ®. Los datos de entrenamiento se colectan a partir de una curva de comportamiento de gas de levantamiento obtenido de un simulador de pozos [5]. En este caso, la expresión que corresponde a la red neuronal empleada para aproximar el flujo de petróleo crudo producido por el sistema es

$$Q_{est}(k)=g[Q_{iny}(k-1)] \quad (2)$$

donde $Q_{iny}(k)\in\Re$ es el flujo de gas-levantamiento inyectado dentro del pozo y $Q_{cu}(k)\in\Re$ es el flujo estimado de petróleo crudo producido.

En esta aplicación, el procedimiento de aproximación se realiza mediante el entrenamiento de una red neuronal perceptrón de tres capas. La capa oculta contiene neuronas usando función de activación sigmoidal y la capa de salida contiene una única neurona con función de activación lineal. Diferentes MLPs son entrenaron mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt, que utiliza el criterio del error cuadrático medio para actualizar los pesos de la red neuronal. La correspondiente red MLP se ilustra en la Fig. 3. La expresión que define la función objetivo usada en la estrategia de optimización está dada por:

$$J(u_k)=\alpha_k[Q_{est}(k)-ref(k)]^2+\beta_k(\Delta u_k)^2 \quad (3)$$

donde $Q_{est}(k)$ es la aproximación de la red neuronal del flujo de petróleo crudo producido (BPD). $ref(k)$: Referencia del flujo de Petróleo crudo producido (BPD). u_k : Flujo de inyección actualizado (MMpcd). $\Delta u_k=u_k-u_{k-1}$, α_k : Peso del error cuadrático del Flujo de Petróleo crudo producido. β_k : Es el peso del esfuerzo de control.

Con el fin de minimizar la función objetivo, se calcula una tasa de gas de inyección óptima variando la tasa de gas de acuerdo a (4) en el intervalo dado en (5) y evaluando cada valor en la función objetivo de tal modo que por comparación entre una evaluación y otra se localiza el valor del flujo de gas que minimiza la función objetivo (3), [6]. Al flujo de gas variante lo denotaremos como u_{rab}.

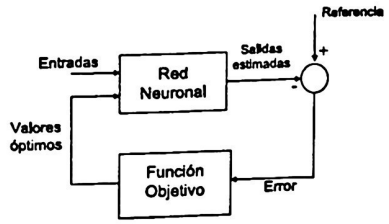


Fig. 2. Estrategia de Optimización basada en una Red Neuronal.

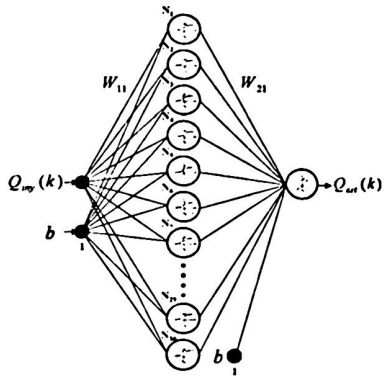


Fig. 3. Red Neuronal MLP

El número de variaciones que tomará u_{rab} en el intervalo dado en (5), con incrementos de Δ será $nit = (M / 0.01) + 1$, recordando que la precisión considerada con que cuenta el instrumento es de 1% después del punto decimal. La Fig. 4. muestra el diagrama de flujo correspondiente al procedimiento de optimización donde $u_{\max}$: Flujo óptimo de gas de inyección (MMpcd), nit : Numero de variaciones del flujo de inyección, u_n : Flujo de gas de inyección inicial (MMpcd), min : Valor mínimo de la función objetivo utilizado en el procedimiento de optimización, $J_{(urab)}$: Valor que adquiere la función objetivo en cada iteración, $iter$: Contador de iteraciones en la rutina de optimización, u_{opt} : Registro para almacenar el valor actual de la tasa óptima de gas d e inyección (MMpcd), P_{optim} : Registro que almacena el valor actual de flujo de petróleo crudo correspondiente al Flujo de gas de inyección optimo, Q: Flujo de Petróleo crudo producido una vez evaluado u_{opt} en el modelo considerado (BPD).

Para resolver el problema de optimización numérica, se tienen las siguientes consideraciones:

- Dada la medida de precisión del instrumento sensor usado en esta aplicación, se considera una unidad porcentual de flujo de inyección de gas nominal, al paso de gas de inyección empleado en la optimización para determinar el flujo de gas de inyección óptimo el cual esta dado por:

$$\Delta Q_{iny}(k) = 1\% = 0.01 \tag{4}$$

- El flujo de inyección de gas será un valor en el siguiente intervalo [MMpcd]:

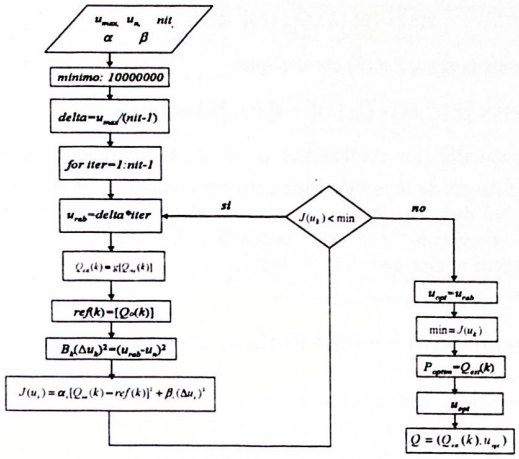


Fig. 2. Diagrama de flujo correspondiente al procedimiento de optimización.

$$0.0 \leq Q_{iny}(k) \leq Q_{iny}\max \tag{5}$$

- No se cuenta con un modelo matemático del proceso; sin embargo, se cuenta con datos experimentales de un simulador de pozos tomados en un solo intervalo de tiempo de periodo relativamente grande. Por lo que, se dispone de un modelo neuronal del proceso, el cual será utilizado para aproximar este comportamiento y construir la función objetivo.
- Es importante definir el número de variaciones del flujo de gas de inyección (*nit*). Este número se calcula como:

$$nit = \left(\frac{M}{\Delta}\right) + 1 \tag{6}$$

donde M: limite máximo de gas de inyección con $\Delta = 0.01$.

- Partiendo de los datos experimentales de la curva de producción podemos definir una función vectorial continua en el tiempo $\varphi(k)$ cuyos elementos sean los valores de referencia de gas de inyección y petróleo crudo producido en el instante *t*.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, podemos formular el siguiente problema de optimización como sigue:

$$\text{Min } J(v(k)) = \| \varphi(k) - \varphi_{est}(k) \| \tag{7}$$

donde:

$$v(k)=[Q_o(k),Q_{iny}(k)]^T \in \Re \tag{8}$$

Ahora, escribiremos la ecuación (8) como sigue:

$$J(v(k))=\left\{\alpha_k[Q_o(k)-Q_{est}(k)]^2+\beta_k[Q_{iny}(k)-Q_{iny}(k-1)]^2\right\} \tag{9}$$

En la expresión anterior, los coeficientes α_k y β_k se emplean para equilibrar las unidades de flujo de gas de inyección y de petróleo crudo. Con el fin de minimizar la función de objetivo dada en (9), debemos variar el flujo de gas de inyección y de petróleo crudo evaluando este par ordenado, de tal forma que mediante comparaciones secuenciales entre las evaluaciones, se localicen los valores óptimos de $Q_{iny}(k)$ y $Q_o(k)$.

3 Aproximación Neuronal del Flujo de Petróleo crudo

Aquí se consideran dos casos; en el primero, un modelo de red neuronal aproxima el flujo de petróleo crudo producido para un solo pozo y en el segundo un modelo de red neuronal aproxima el flujo de petróleo crudo producido para un sistema de producción de dos pozos. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Caso 1: Sistema de producción de un solo pozo. El sistema de producción de petróleo crudo se ilustró en la Fig. 1. En este caso, el vector de entrada $\varphi(k)$ se genera considerando una presión en la cabeza del pozo igual a 12 kg/cm2. En la Fig. 5 se muestran los datos de entrenamiento que fueron colectados utilizando el simulador de pozos PROSPER*, 600 pares de muestras de datos experimentales de gas de inyección se utilizan y se toman en el intervalo $0.0 \leq Qiny \leq 6.0$. En la Fig. 6 se muestran los datos de entrenamiento que corresponden al flujo de petróleo crudo producido en unidades BPD (Barriles estándar por día).

En este caso, la red neuronal se entrena para aproximar el flujo de petróleo crudo producido para un único pozo. Las características de la mejor red neuronal entrenada se describe en la Tabla 1 y el error obtenido se muestra en la Fig. 7.

Tabla 1. Arquitectura de la red neuronal y errores obtenidos, caso 1

Numero de neuronas		error	error (%)
Capa intermedia	Capa de salida		
30	1	0.0119	0.0004

La aproximación llevada a cabo mediante la red neuronal se compara con el flujo de datos experimentales de petróleo crudo producido por el pozo (ver Fig. 8).

Caso 2: Sistema de producción basado en dos pozos. En la Fig. 9 se muestra un sistema de producción de petróleo crudo de dos pozos. El vector de entrada $\varphi(k)$ se generó considerando una presión en la cabeza de cada pozo de 12 k g/cm2 y 14 kg/cm^2, respectivamente.

PROSPER es una marca registrada de Petroleum Experts Ltd.

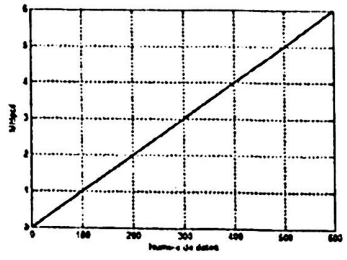


Fig. 5. Datos experimentales de flujo de gas de inyección.

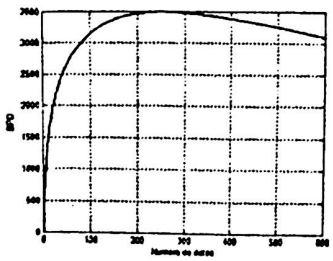
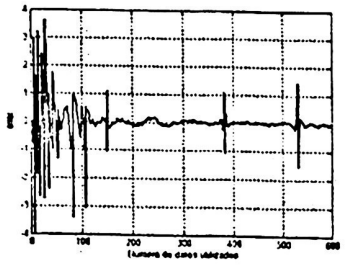
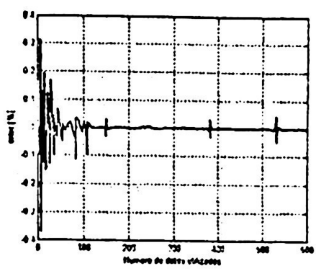


Fig. 6. Datos experimentales de flujo de producción de petróleo crudo.



(7a)



(7b)

Fig. 7. Resultados para el caso 1, (a) error, (b) porcentaje de error.

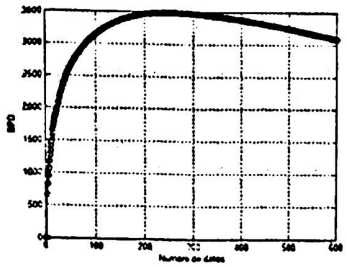


Fig. 8. Resultado Comparación entre las aproximaciones logradas utilizando el modelo de red neuronal (línea sólida) y datos experimentales (marcas redondas) del sistema de un solo pozo.

En la Fig. 10 se muestran los datos de entrenamiento, para lo cual se consideran 600 pares de muestras de datos experimentales de gas de inyección y se toman en un intervalo de gas producido de $0.0 \leq Qiny \leq 12.0$. La red neuronal se entrena para aproximar el flujo de petróleo crudo producido por el sistema. Como en el caso anterior, después del entrenamiento y validación, una red neuronal se selecciona considerando su desempeño y complejidad. La mejor red neuronal entrenada se

describe en la Tabla 2. Se muestran los datos de entrenamiento que corresponden al flujo de petróleo crudo producido en unidades BPD.

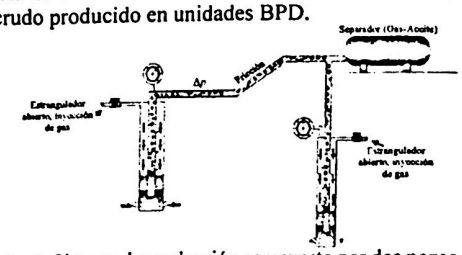


Fig. 9. Sistema de producción compuesto por dos pozos.

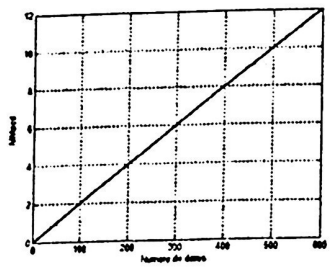


Fig. 10. Datos experimentales de flujo de gas de inyección.

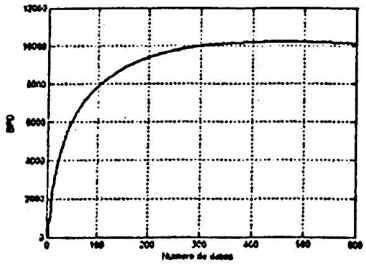
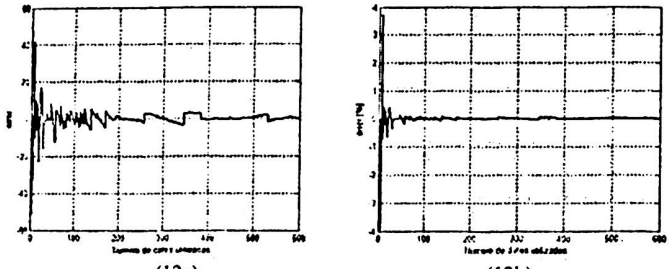


Fig. 11. Valores para la validación

Tabla 2. Arquitectura de la red neuronal y errores obtenidos, caso1

Numero de neuronas		error	error (%)
Capa intermedia	Capa de salida		
30	1	-0.3702	-0.0037

En la Fig. 12 se muestran el error obtenido utilizando la red neuronal descrita en la Tabla 2. La aproximación obtenida con la red se compara con el flujo de datos experimentales de petróleo crudo para un sistema compuesto por dos pozos (Fig. 13).



(12a) (12b)

Fig. 12. Resultados para el caso 2, (a) error, (b) porcentaje de error.

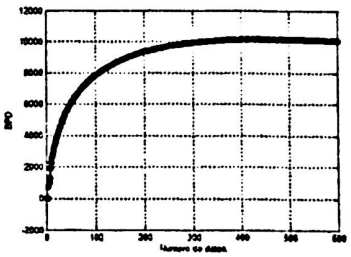


Fig. 13. Resultado de la comparación entre las aproximaciones (línea sólida) y los datos experimentales (marcas redondas) para un sistema de dos pozos.

4 Aplicación de la Estrategia Neuronal de Optimización

Una vez que ambos sistemas son aproximados usando redes neuronales, la siguiente etapa se establece y se resuelve el problema de optimización como sigue.

Caso 1: Sistema de un solo pozo. El procedimiento se utiliza para determinar el flujo de gas de inyección óptimo. Cuando la iteración 93, se lleva a cabo el flujo óptimo de gas de inyección obtenido es 0.93 MMpcd (Ver Fig. 14). Este flujo se evalúa en la red neuronal descrita en la tabla 1 para obtener una producción de 3102.8 BPD. En la Fig. 15 se muestra como la función objetivo se minimiza.

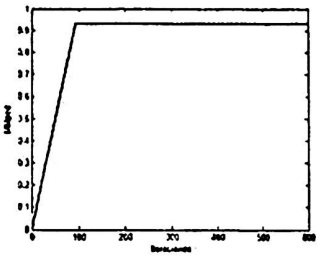


Fig. 14. Gas de inyección óptimo caso1

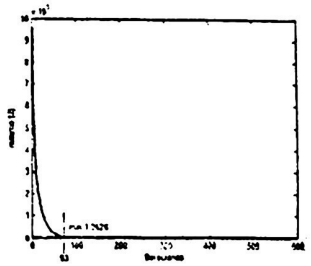


Fig. 15. Función objetivo minimizada

Caso 2: Sistema de producción basado en dos pozos. El procedimiento de optimización se utiliza ahora para determinar el flujo óptimo de gas de inyección. Cuando la iteración 349, se lleva a cabo el flujo óptimo de gas de inyección obtenido es 6.98 MMpcd (Ver Fig. 16). Este flujo se evalúa en la red neuronal descrita en la Tabla 2 para obtener una producción de 10087.0 BPD. En la Fig. 17 se muestra como la función objetivo es minimizada.

5 Conclusiones

En este trabajo una estrategia de inteligencia computacional basada en redes neuronales se propone para optimizar la tasa de gas de inyección requerido a inyectarse en un sistema de producción de hidrocarburos.

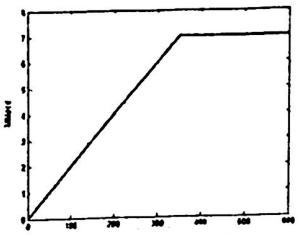


Fig. 16. Gas de inyección óptimo caso 2

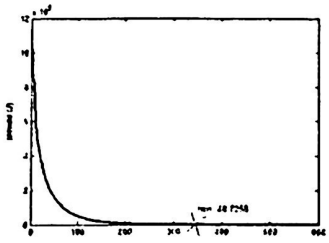


Fig. 17. Función objetivo minimizada

Una vez que la tasa óptima es determinada y aplicada al sistema de producción, los resultados de simulación obtenidos se aproximan a la referencia de petróleo crudo producido. La estrategia propuesta pone de manifiesto la habilidad de las redes neuronales para aproximar el comportamiento de un sistema de producción de petróleo crudo y para resolver problemas de optimización cuando un modelo matemático no esta disponible. Es justo mencionar que esta metodología puede utilizarse como un mecanismo de ayuda para ingenieros de producción. Los investigadores están motivados a extender el presente trabajo mediante la optimización con algoritmos genéticos.

6 Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la UNACAR a través del proyecto PR/131/2008.

7 Referencias

1. Bieker H.P., Slupphaug, O. and Johansen, T. A., "Real-Time Production Optimization of Oil and Gas Production Systems: A Technology Survey," *SPE Production & Operations Journal*, vol. 22, no. 4, pp. 382-391, November 2007.
2. Vasper, A., "Auto, Natural, or In-Situ Gas-Lift Systems Explained," *SPE Production & Operations Journal*, vol. 23, no. 1, pp. 75-80, February 2008.
3. Hornik, K., Stinchcombe, M. and White H. " Multilayer Feedforward Networks are Universal Aproximators", Neural Networks, vol. 2, no. 5, 1989.
4. Norgaard, M. Ravn, O.; Poulsen, N. K., y Hansen, L. K., "Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic Systems", Springer-Verlag, London, 2000.
5. Prosper. Petroleum Experts Ltd. User Guide IPM V5.3Build #173 Jun 6, 2006.
6. Ruz-Hernandez Jose A., Suarez D. A., Shelomov E. and Villavicencio A. ,"Predictive Control Based on an Auto-Regressive Neuro-Fuzzy Model Applied to the Steam Generator Startup Process at a Fossil Power Plant", Revista de Computación y Sistemas, vol. 6, no. 3, CIC-IPN, ISSN 1405 5546, Mexico, pp.204-212, 2003.160, 1987.
7. Sánchez E. N., M.C. Alanís G A.. Redes Neuronales "Conceptos Fundamentales y Aplicaciones al Control Automático". Cinvestav Unidad Guadalara. Editorial Prentice Hall.

Diseño asistido por computadora de controladores PID estabilizantes

Cristina Verde[1], Rolando Carrera[1], and Shankar Bhattacharyya[2]

[1] Instituto de Ingeniería, Uiversidad Nacional Autónoma de México
verde@servidor.unam.mx
[2] Texas A&M University, College Station

Resumen Considerando las condiciones, recientemente reportadas por Keel et al., de los controladores PID estabilizantes en términos de la respuesta frecuencial de la planta para sistemas SISO, se describe un algoritmo para generar la familia de PID estabilizantes. La clave del procedimiento es la obtención de un polinomio auxiliar que permite aplicar el teorema de Hermite-Biehler para obtener el cambio neto de fase de éste y que además permite separar el ajuste de la ganancia proporcional del controlador de las otras dos: integral y derivativa. El procedimiento se presenta a manera de algoritmo y es usado en un ejemplo para generar la familia de PID para un sistema hidráulico, suponiendo conocida su respuesta frecuencial alrededor de un punto de funcionamiento. Este diseño permitió asimilar y familiarizarse con el método y actualmente se encuentra en construcción un paquete genérico asistido por computadora, en ambiente MATLAB, para generar los controladores estabilizantes de plantas en donde se conoce solamente su comportamiento en un cierto intervalo de frecuencias

Fianciado por la Universidad Nacional Autónoma de México, IN-112208 DGAPA.

1 Introducción

La mayor parte de los métodos conocidos para diseñar controladores tienen como base el modelo de la planta, obtenido éste por métodos de identificación o ecuaciones constitutivas. Por ejemplo, la ventaja del LQR [4] es que garantiza, al mismo tiempo, estabilidad y optimalidad; pero tiene la desventaja de que con frecuencia es necesario usar técnicas de identificación para producir el modelo de la planta y que el controlador resultante es de orden grande. Esto último, para aplicaciones industriales, es un impedimemento para su realización, debido a la carga de computo requerido y a la necesidad de esquemas con pocos parámetros de ajuste. Con el objetivo de obtener controladores susceptibles de ser usados en la industria, es necesario que estos sean de orden bajo.

El control clásico, que toma como base la teoría desarrollada por Nyquist [7] y Bode [2], tiene la sencillez de ser un diseño gráfico que modifica la respuesta en frecuencia de lazo abierto con un simple compensador en cascada, logrando con ello margenes de estabilidad prescritos para lazo cerrado.

M.A. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 137-146

Por otro lado se ha demostrado que los controladores PID tienen un rol muy importante en la industria [1] y tienen un vasto campo de aplicación que puede ser en sistemas eléctricos. hidráulicos, fluídicos, y neumáticos. Recientemente ha aparecido una gran cantidad de diversos métodos de diseño de controladores PID [6].

En uno de sus trabajos más recientes, Keel y Bhattacharyya [5] demuestran que el diseño de controladores, con al menos tres términos, puede ser realizado directamente de mediciones de respuesta en frecuencia en la planta, sin tener que construir un modelo en el espacio de estados o función de transferencia. Esta realización del controlador no requiere explicitamente del conocimiento del orden del sistema ni de la cantidad de polos o ceros en el LHP (semiplano izquierdo, por sus siglas en inglés) o en el RHP (semiplano derecho, ídem), ni es necesaria una identificación de la planta. En el caso de controladores PID, la solución especifica una banda de frecuencia donde la respuesta debe ser conocida de manera precisa, y fuera de ella basta con datos o mediciones aproximadas. Además. el método propuesto es válido para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI, ídem), estables o inestables.

Es común que, para plantas estables, los datos de respuesta en frecuencia se obtengan de mediciones directas; entonces la teoría propuesta puede ser aplicada a plantas estables sin tener que construir su modelo. Paras plantas inestables, los datos de respuesta en frecuencia pueden ser obtenidos si se tiene un compensador en la retroalimentación que estabiliza la planta. Con el método propuesto por Keel et al se sintetiza el conjunto completo de controladores PID que garantizan estabilidad, que es la base para lograr múltiples especificaciones de desempeño; así, diferentes objetivos de desmpeño pueden ser intersectados para satisfacer todos ellos de manera simultánea. Los cálculos requeridos para ello implican programación lineal o solución de ecuaciones lineales sujetas al barrido de un parámetro. Para satisfacer de manera simultánea múltiples criterios de desempeño se requiere la solución simultánea de un conjunto considerable de desigualdades lineales.

El objetivo de este trabajo es familiarizarse con la propuesta de Keel, asociada al cálculo de la familia de controladores que estabilizan una planta cuya información disponible es su respuesta en frecuencia, para con ello desarrollar un programa de diseño asistido por computadora (CAD, ídem) que permita ajustar controladores PID de manera iterativa.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta la teoría del método de diseño de la familia de controladores PID estabilizantes para una planta estable descrita por su respuesta en frecuencia. El algoritmo de diseño de esa familia de controladores es presentado en la sección 4. Posteriormente, sección 5, se aplica el algoritmo a una planta hidráulica, para finalmente, sección 6, presentar los puntos o conclusiones sobresalientes que surgieron durante el desarrollo de este trabajo.

2 Preliminares

El teorema de Hermite-Biehler establece que un polinomio real $\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2)$ de grado n es Hurwitz estable si y sólo si los ceros de su parte par $\delta_e(-\omega^2)$ e impar $\delta_o(-\omega^2)$ son:

1. Reales y distintos,
2. Los no negativos satisfacen la propiedad de intercalamiento

$$0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} \cdots$$

y los dos coeficientes de mayor orden de $\delta(s)$ tienen el mismo signo.

Por otro lado, considerando que un polinomio Hurwitz tiene la propiedad monotónica de fase, es más simple, en algunos casos, verificar si es Hurwitz a través de su gráfica, la cual debe moverse contra reloj a través de n cuadrantes, cuando se incrementa la frecuencia de 0 a ω. Esta propiedad y la extensión al caso de funciones racionales está detrás del siguiente trabajo, dado que considera se conoce solamente el comportamiento frecuencial de la planta [3].

Considere una función racional

$$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

con $N(s)$ y $D(s)$ polinomios con coeficientes reales de orden m y n y sin ceros en el eje $j\omega$. Denote las parejas de números de ceros y polos de $R(s)$ en el lado derecho e izquierdo del plano s respectivamente por

$$[z_R^+ \; z_R^-], \quad [p_R^+ \; p_R^-],$$

entonces se puede demostrar que el número neto de cambios en fase de $R(j\omega)$ cuando la frecuencia se barre desde 0 hasta ∞ está dada por

$$\Delta_0^\infty \angle R(j\omega) = \frac{\pi}{2}(z_R^- - z_R^+ - (p_R^- - p_R^+)),$$

este incremento en fase puede expresarse en términos de lo que se conoce como firma Hurwitz de $R(s)$

$$\sigma(R) \triangleq z_R^- - z_R^+ - (p_R^- - p_R^+), \tag{1}$$

y dado que $R(s)$ no tiene polos ni ceros en el eje $j\omega$, resulta que

$$\Delta_0^\infty \angle R(j\omega) = \frac{\pi}{2}\sigma(R).$$

Adicionalmente, se ha demostrado que la firma $\sigma(R)$ puede expresarse en términos de la parte real e imaginaria de $R(j\omega) = R_r(\omega) + jR_i(\omega)$ en un conjunto

de frecuencias $\Omega = \{0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \infty\}$, sin conocer la ubicación de los polos y ceros de $R(s)$. Las relaciones resultantes se reducen a

$$\sigma(R) = \left(sgn(R_r(\omega_0) + 2\sum_{k=1}^{l-1}(-1)^k sgn(R_r(\omega_k)) + (-1)^l sgn(R_r(\omega_l)) \right) \cdot (-1)^{l-1} sgn(R_i(\omega_l))$$

para $n - m$ par y

$$\sigma(R) = \left(sgn(R_r(\omega_0) + 2\sum_{k=1}^{l-1}(-1)^k sgn(R_r(\omega_k)) \right) (-1)^{l-1} sgn(R_i(\omega_l))$$

para $n - m$ impar, donde la serie de frecuencias

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < ...\omega_l = \infty^-$$

corresponden a los ceros reales finitos no negativos de multiplicidad impar de $R_i(\omega)$ [3].

3 Caracterización de PID estabilizantes

Con base en los resultados anteriores, el objetivo ahora es determinar la condición que debe tener la función racional asociada al sistema con un PID en lazo cerrado para garantizar la estabilidad usando la firma Hurwitz de un racional.

Considere el esquema de la Fig. 1 y sea $P(s)$ la función de transferencia de la planta sin polos y ceros en el eje $j\omega$ con grado relativo $r = n_P - m_P$ y cuyos ceros y polos en el lado derecho del plano complejo se denotan por $[z_P^+, p_P^+]$ y en el izquierdo $[z_P^-, p_P^-]$ respectivamente. Entonces la firma de la planta está dada

$$\sigma(P) = (z_P^- - z_P^+) - (p_P^- - p_P^+) = -r - 2(z_P^+ - p_P^+) \tag{2}$$

y cuando P es estable, la firma se reduce a $\sigma(P) = -r - 2z_P^+$.

Entonces, cuando se tiene la respuesta en frecuencia de la planta

$$P(j\omega) = P_r(\omega) + jP_i(\omega)$$

se puede obtener el grado relativo a partir de la pendiente de la magnitud en altas frecuencias, la firma de la planta a partir del defasamiento neto de $\omega = 0$ hasta ∞, y determinar el número de ceros inestables de $P(s)$, a pesar de no conocer la función de transferencia.

Sea la estructura del controlador

$$C(s) = K_p + \frac{K_d s}{1 + sT} + \frac{K_i}{s},$$

entonces, la estabilidad del sistema de control es equivalente a la ausencia de ceros en el lado derecho del plano complejo de la función racional

$$F(s) = s(1 + sT) + (K_i + K_p s + K_d s^2)P(s). \tag{3}$$

En terminos de la firma de Hurwitz la condición de estabilidad de la familia de PID estabilizantes se reduce a:

$$\sigma(F) = (z_F^- - z_F^+) - (p_F^- - p_F^+)$$

con $p_F^- = p_P^-$; $p_F^+ = p_P^+$; $z_F^+ = 0$; $z_F^- = n+2$, y por tanto $\sigma(F) = n+2-(p_P^- - p_P^+)$.

Con objeto de simplificar la busqueda de los intervalos de los parámetros de los PID estabilizantes y separar el ajuste de la parte proporcional de las otras dos, se propone una función auxiliar.

Lemma 1. *Sea la función auxiliar* $\bar{F}(s) \triangleq F(s)P(-s)$, *entonces la condición de estabilidad del lazo retroalimentado con el PID es equivalente a que la firma Hurwitz de la función auxiliar* $\bar{F}(s)$ *sea*

$$\sigma(\bar{F}(s)) = n - m + 2z^+ + 2 \tag{4}$$

Además, se puede demostrar que la parte real de $\bar{F}(j\omega)$, tomando valores reales de ω, depende de los parámetros asociados a la parte integral y derivativa. Por el contrario la parte imaginaria solamente depende de la ganancia proporcional [5]. Es decir

$$\begin{aligned}\bar{F}(j\omega) &= (K_i - K_d\omega^2)\,|P(j\omega)|^2 - \omega^2 T P_r(\omega) + \omega P_i(\omega) + \\ &\quad j\omega\left(K_p\,|P(j\omega)|^2 + P_r(\omega) + \omega T P_i(\omega)\right) \\ &= \bar{F}_r(\omega, K_i, K_d) + j\bar{F}_i(\omega, K_p)\end{aligned}$$

y por tanto, las condiciones de estabilidad se han reducido a la firma de $\sigma(\bar{F})$ y su cálculo se puede hacer separando los valores de frecuencia $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ que satisfacen la condición $\bar{F}_i(\omega, K_p) = 0$, y requiriendo que $\bar{F}_r(\omega, K_i, K_d) \neq 0$ para el mismo conjunto de frecuencias $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \infty$.

Resumiendo se debe buscar el conjunto de frecuencias Ω reales para cada K_p que simultáneamente satisfacen la firma 4 y que $\bar{F}_i(j\omega, K_p) = 0$.

Para la verificación del valor de la firma $\sigma(\bar{F}(s))$ se hace uso de

$$[i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots + (-1)^{i-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l](-1)^{l-1}j = n - m + 2z^+ + 2$$
$$[i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots + (-1)^{i-1}2i_{l-1}](-1)^{l-1}j = n - m + 2z^+ + 2$$

demostradas en [3] con el conjunto de caracteres $I = \{i_0, i_1, \cdots i_l\}$ con $i_k = \{+1, -1\}$.

El procedimiento para el caso de plantas inestables requiere conocer un controlador auxiliar estabilizante $C_a(s)$ el cual permite generar la respuesta frecuencial y determinar la tripleta $\{n, m, z^+\}$, y por razones de espacio es omitido.

4 Algoritmo

El siguiente procedimiento calcula el conjunto completo de ganancias de la familia de PID que estabilizan la planta $P(s)$, bajo el esquema descrito en la figura 1 suponiendo que la planta no contiene ni polos ni ceros en el eje imaginario.

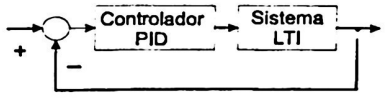


Fig. 1. Sistema con retroalimentación unitaria y un controlador PID

1. **Para sistemas estables:** Los datos disponibles son la respuesta en frecuencia de la planta $P(j\omega)$, i.e. $|P(j\omega)|$ y $\angle P(\omega)$.
   (a) Con la pendiente de alta frecuencia del Bode de magnitud de $P(j\omega)$ determine el grado relativo (r_P) de la planta

$$r_P = n - m = -\frac{1}{20} \cdot \frac{dP_{dB}(\omega)}{d(\log_{10}\omega)}\bigg|_{\omega\to\infty} \tag{5}$$

   donde $P_{dB}(\omega) \triangleq 20\log_{10}|P(j\omega)|$.
   (b) Con $\Delta_0^\infty[\phi(\omega)]$ denote el cambio neto en fase de $P(j\omega)$ para $\omega \in [0,\infty)$. Determine el número de ceros de la planta en el semiplano derecho (z^+) a partir de

$$\Delta_0^\infty[\phi(\omega)] = -\left[(n-m) + 2z^+\right]\frac{\pi}{2}$$

   expresión obtenida a partir de la firma (Hurwitz) de la planta,

$$\sigma(P) = -(n-m) - 2(z^+ - p^+),$$

   con $p^+ = 0$, polos de la planta en el RHP.
   (c) Ir al paso 2

1. **Para sistemas inestables:** Los datos disponibles son la función de trasferencia de un controlador estabilizante $D(s)$ y la respuesta en frecuencia correspondiente del sistema estable en lazo cerrado $G(j\omega)$.
   (a) Calcule el Bode de magnitud y fase ($|P(j\omega)|$, $\angle P(\omega)$) de la planta con

$$P(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{D(j\omega)(1-G(j\omega))}$$

   (b) Determine el grado relativo de la planta r_P a partir de la pendiente de alta frecuencia del Bode de magnitud de $P(j\omega)$, ecuación (5).
   (c) Determine los ceros en el SPD (z_D^+) y el grado relativo (r_D) de $D(s)$.
   (d) Calcule la firma $G(s)$ con

$$\sigma(G) = \frac{\pi}{2}\Delta_0^\infty \angle G(j\omega).$$

(e) Calcule z^+ usando

$$z^+ = \frac{1}{2}[-r_P - r_D - 2z_D^+ - \sigma(G)].$$

(f) Ir al paso 2

2. Calcule $g(j\omega)$ usando

$$g(j\omega) \triangleq -\frac{\cos\phi(\omega) + \omega T \sin\phi(\omega)}{|P(j\omega)|}$$

con los datos del inciso (1), donde $\phi(\omega) = \angle P(j\omega)$.

3. Para $K_p = g(j\omega)$, fije $K_p = K_p^*$ y resuelva

$$K_p^* = -\frac{\cos\phi(\omega) + \omega T \sin\phi(\omega)}{|P(j\omega)|}, \tag{6}$$

defina $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{l-1}$ las distintas frecuencias con multiplicidades impar que son soluciones de la ecuación anterior.

4. Elija $\omega_0 = 0$, $\omega_l = \infty$ y $j \triangleq sgn\bar{F}_i(\infty^-, K_p^*)$.

5. Determine todas las series de enteros $i_t \in \{+1, -1\}$ tales que:

(a) Para $n - m$ par:

$$[i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots + (-1)^{i-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l](-1)^{l-1} j = n - m + 2z^+ + 2. \tag{7}$$

(b) Para $n - m$ impar:

$$[i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots + (-1)^{i-1}2i_{l-1}](-1)^{l-1} j = n - m + 2z^+ + 2. \tag{8}$$

6. Para la $K_p = K_p^*$ escogida en el paso 3, obtenga los valores (K_i, K_d) estabilizantes con la siguiente expresión

$$\left[\frac{\omega_t \sin\phi(\omega_t) - \omega_t^2 T \cos\phi(\omega_t)}{|P(j\omega_t)|} - K_d\omega_t^2 + K_i\right] i_t > 0$$

para $t = 0, 1, \cdots, l$.

7. Repita los pasos previos variando K_p. El rango en el cual K_p puede tomar valores, está determinado por los requerimientos en que (7) u (8) se satisface para al menos una serie de enteros, como lo establece el paso 3 (solución de 6) que genera el siguiente rango

$$K_p \in (K_p^{\min}, K_p^{\max})$$

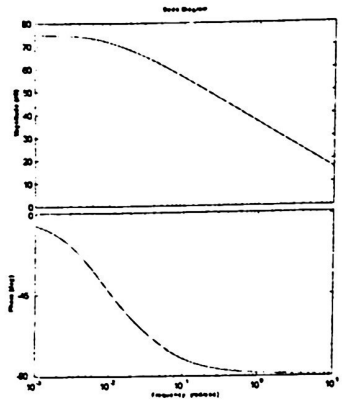
donde

$$K_p^{\min} \triangleq \min_{\omega \in \underline{\omega}} g(\omega), \quad K_p^{\max} \triangleq \max_{\omega \in \underline{\omega}} g(\omega)$$

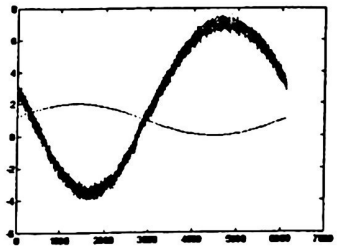
y $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_{l-1})$.

5 Ejemplo Ilustrativo

Para ilustrar el procedimiento se ha tomado la respuesta en frecuencia de un sistema hidráulico. formado por dos tanques interconectados. Los datos son muestreados con diferentes periodos de muestreo y la respectiva gráfica de Bode se presenta a continuación: a nivel de ejemplo la siguiente figura corresponde a las señales senoidales de entrada y salida para $f = 0.001Hz$.



Respuesta en frecuencia del sistema hidráulico



Registro de un punto de la respuesta en frecuencia del sistema hidráulico.

El comportamiento frecuencial y el hecho de ser una planta estable corresponde a la información requerida para el cálculo de la familia de controladores PID estabilizantes de la planta. Considerando que la pendiente de la magnitud de la gráfica a altas frecuencias es $-20\ db/dec$ se tiene entonces que $n - m = 1$. Por otro lado, como el cambio total de la fase es $-\pi/2\ rad$ y la planta es estable $p^+ = 0$ y de la ecuación (2) se tiene que la planta no tiene ceros en el lado derecho del plano complejo es decir $z^+ = 0$. Así, la firma de la función auxiliar que garantiza la estabilidad está dada por

$$\sigma(\bar{F}(s)) = n - m + 2 = 3$$

Dado que $n - m$ es impar la cadena de enteros candidato se obtiene de

$$\left[i_0 - 2i_1 + 2i_2 - \ldots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}\right](-1)^{l-1}j = 3 \tag{9}$$

donde

$$j = sgn\left[\bar{F}_i(\infty^-, K_p)\right] = -sgn\left(\lim_{\omega\to\infty} g(\omega)\right)$$

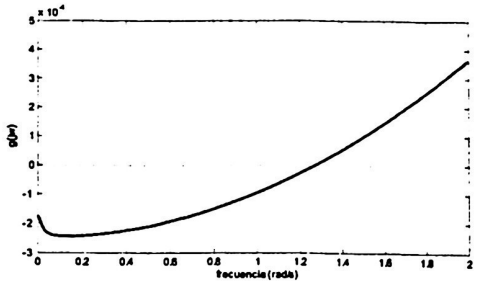


Fig. 2. Gráfica de la función $g(\omega)$ para ω de 0 a 2 rad/s

con

$$g(\omega) = -\frac{\cos\phi(\omega) + \omega T \sin\phi(\omega)}{|P(j\omega|}$$

De la forma de $g(\omega)$ presentada en la figura 2 se observa que ésta tiene cuando mucho dos raíces reales si se permiten valores negativos de K_p y una para $K_p > -1.7e-4$ independientemente de los valores de K_i y K_d. Además $j = -1$ y por tanto la cadena mínima de caracteres que satisface (9) es:

$$\mathcal{F} = \{i_o, i_1\} = \{+1, -1\}$$

con $l = 2$. Esta condición significa que K_p debe ser elegida tal que $\bar{F}_i(\omega_1, K_p^*) = 0$ tenga una raíz real positiva y corresponde con la intersección de $g(\omega)$ y el valor del término proporcional. Así fijando la ganancia se calcula la frecuencia ω_1 y el conjunto de frecuencias

$$\Omega = \{\omega_0 = 0, \omega_1, \omega_2 = \infty\}$$

junto con la desigualdad

$$\left(K_i - K_d\omega_t^2 + \frac{-\omega_t^2 T\cos\phi(\omega_t) + \omega_t \sin\phi(\omega_t)}{|P(j\omega_t)|}\right) i_t > 0$$

genera el espacio del conjunto estabilizante (K_i, K_d).

En particular se reducen a las condiciones

$$K_i > 0$$

$$K_i - K_d\omega_1^2 < \frac{\omega_1^2 T\cos\phi(\omega_1) - \omega_1 \sin\phi(\omega_1)}{|P(j\omega_1)|}$$

para cada valor de K_p seleccionado. La Fig. 3 muestra la región de valores de los parámetros de la parte integral y derivativa para los valores de $K_p \in \{0, 0.001, 0.004\}$ y $10 < K_i < 0$. Se omite el barrido completo de la ganancia por motivos de visualización.

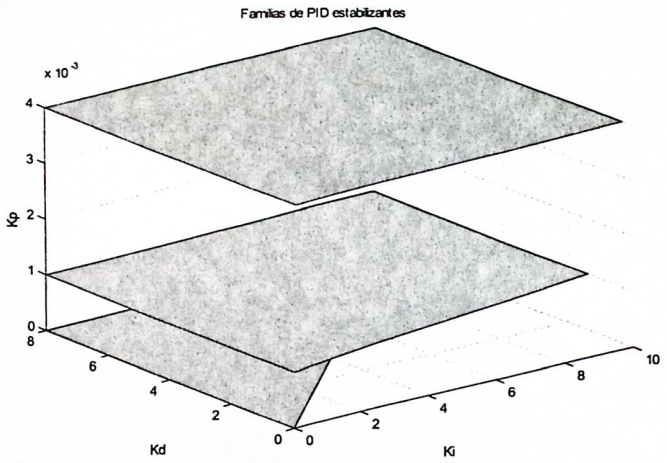


Fig. 3. Región de valores de K_i y K_d para $K_p \in \{0, 0.001, 0.004\}$

6 Conclusiones

Considerando las condiciones de los PID estabilizantes para una planta SISO, de la cual solamente se conoce su respuesta en frecuencia, se deriva un algoritmo para generar toda la familia de controladores. Este algoritmo se aplica al caso de un sistema hidráulico de dos tanques. La asimilación de la propuesta reportada recientemente permitió sentar las bases para la realización de un paquete CAD que se encuentra en construcción.

Referencias

1. Aström, K., Hägglund. PID Controllers: Theory, Design and Tuning, 2nd ed. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, USA, (1995)
2. Bode, H. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand, Princeton, N.J. 81945)
3. Datta, A., Ho, M. and Bhattacharyya, S. Advances in Industrial Control Structures and Synthesis of PID Controller. Springer Verlag, N.Y., USA (2000)
4. Kalman, R. Contribution to the theory of optimal control. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (1960)
5. Keel, L. and Bhattacharyya, S. Cotroller synthesis free of analytical models: Three term controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, en prensa.
6. Li, Y., Ang, K. and Chong, G. PID Control System Analysis and Design. IEEE Control Systems Magazine, **26** (2006) 32-41
7. Nyquist, H. Regulation theory. Bell System Technical Journal, **11** (1932) 126-147

Port-based models for real-time supervision and diagnosis during oilwell acid stimulations

Ricardo Lopezlena

Instituto Mexicano del Petróleo, Exploración y Producción
Eje Central L. Cárdenas 152, CP 07730, Ciudad de México
Apdo. Postal 14-805. Tel. +52-9175-7603. rlopezle@imp.mx

Abstract. It is discussed the rigorous modeling of an oil wellbore during an acid stimulation with the purpose of predicting and monitoring the remotion of clogs on the formation around their bottom. The rigorous modeling of the fluidic system is approached as a composition of energy dissipating lumped subsystems interconnected by power conserving variables in a similar fashion considered in [13]. The resulting chain of lumped models serves to predict the bottomhole pressure during injection, simplifying the computational implementation of a system for real-time monitoring, prediction and diagnosis of acid stimulation operations.

1 Introduction

These days, preserving the productivity of existent oilwells is the first concern in the mexican oil industry.

A common maintenance operation to keep oilwell productivity is known in the oil industry as *matrix acid stimulation*. The purpose of a matrix acidizing treatment is to increase the productivity of an oil well by injecting a system of dissolving acids into the wellbore, and with this, dissolving the *near-wellbore formation damage*, commonly called *skin*. These acids tend to create pathways (*wormholes*) around the borehole that increase productivity. Similarly to *hydraulic fracturing*, the stimulation acids are necessarily pumped at pressures above the reservoir static pressure but in a range of pressures always below the reservoir fracture pressure, resulting in a cheaper operation, [3].

This operation is not always sucessful. Two determinant factors of success are the correct selection of fluids and additives and the operator practice in the field. While the selection of fluids is nowadays determined by the software developed by the mayor service distributors, the field practice can improved significantly by real-time monitoring of their operations.

Real-time monitoring of the performance of matrix acidizing treatments needs of a dynamic model that provides an *estimated bottomhole pressure during injection* P_{wfi} in order to diagnose the reduction of skin. This paper focuses on the modeling issues associated to the prediction of the bottomhole pressure. The complementary paper [12] concentrates on the algorithms for prediction of the skin factor along with the real-time computer implementation of the overall system.

Typically, an estimulation consist of the injection of a system of fluids on a predesigned

M.A. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 147-156

schedule of dosaged stages, *e.g.* the injection of a ***preflush fluid*** (with dilluted hydrochloric acid) followed by several *main acids* (regular mud acid, a mixture of HCl and hydrofluoric HF acids), several ***overflushes*** (with more dilluted hydrochloric acid) and probably a *diverter slug* (very dilluted HCl), see Figure 1. After the necessary num-

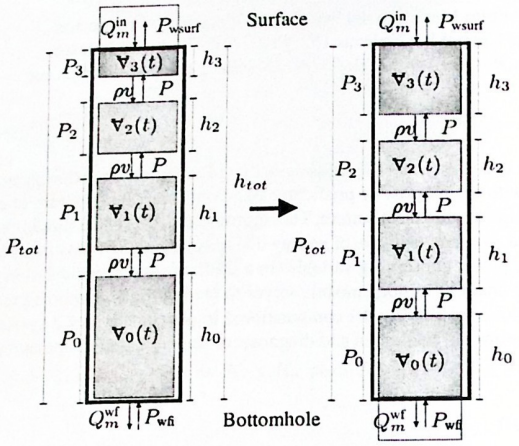


Fig. 1. Staggered energy transfer during stimulation

ber of these stages, the process is finished with a ***tubing displacement fluid*** (probably NH_4Cl brine or with foam), [3, 9].

The traditional approach of modeling this process consist on assuming the sequential stages of fluids to define a hydraulic column with an associated pressure drop on each stage, see *e.g.* [18, 15, 1, 23]. Nevertheless, the modeling difficulty of this process is mainly due to the different properties of the system of fluids during the sequential injection, along with the uncertainty introduced by each compressible stage.

In our approach, the resulting model consist of a system of differential-algebraic equations (DAEs) that keep track of the behavior of the control volumes of each fluid as they are introduced along the production tubing (P.T.) until the control volume integrates into the formation. Based on their properties it is possible to estimate the pressure drop of each stage and along with the information of the surface pressure, it is possible to provide an estimate of the bottom hole pressure during this injection. Though, everytime that a new fluid is added to the fluid column and everytime that the fluid at the bottom hole integrates to the formation, the column pressure calculation is being modified, see Fig. 1.

The main contribution of this work is a preliminar system-theoretic oriented, lumped modelling of the acid stimulation process. In particular, influenced by the port-based modelling of fluidic process systems presented in [13], we provide a differential-algebraic

model to predict in real-time the bottomhole pressure during injection, which is fundamental in order to predict the remotion of clogs due to formation damage. Based on a singular-pertubation type argument, the full fluid dynamic equations are reduced to DAEs consisting of a dynamic conservation equation restricted by an integral invariance principle on the momentum equation. With the use of an optimization-based algorithm to predict the pressure drop due to foams introduced in this paper, we formalize a method that guarantees satisfaction of the momentum equation in contrast to the iterative method by [6].

The paper is organized as follows. In Sec. 2 we provide the fundamental concepts of lumped modeling for staggered fluids using the dissipative system approach presented in [13]. In Sec. 3 we present the singular perturbation-based model reduction resulting in an optimization approach to satisfy the spatial restrictions of the problem during the calculations of pressure. In Sec. 4 we deal with the accommodation of volumes inside the wellbore in order to predict the bottomhole pressure. Throughout the paper we discuss the advantages of using the systemic modelling approach presented. Finally we draw some conclusions.

2 Port-based modeling of staggered fluids

An attractive paradigm for systemic modeling and interconnection of petroleum production systems are port-based models. In this modeling paradigm for control systems every subsystem is conceptualized as an energy distribution device whose exogenous (input-output) variables are power conserving. In particular, the influential paper [20] contributes to this viewpoint by including the (Euler) ideal fluid equations in the port-Hamiltonian formalism. This systemic formalism has several advantages in applications due their remarkable properties of energy preservation and closedness under system interconnection. This approach has been succesfully applied for uncompressible fluidic models like in open channels, see [7]. In the case of compressible fluids, in [13] the authors provided some *approximations* of distributed port-Hamiltonian equations for these fluids. The complete (exact) description of compressible fluids for non-ideal fluid dynamics in the port-Hamiltonian formalism still seems to be too difficult, see [14, 5] for recent progress of this formalism for irreversible Thermodynamics.

In the problem of this paper we deal with uncompressible, compressible, two-phase and non-newtonian fluids with complex reological behavior, and therefore a complete port-Hamiltonian should not be expected here. Nevertheless, the interconnection of subsystems is highly benefited by the overall systemic approach based on energy preserving interconnections. Moreover, in the distributed port-Hamiltonian formalism an *Eulerian frame* is assumed and in the problem of this paper it is sometimes convenient to fix a frame to the control volume $\forall$, resulting in a *Lagrangean frame.*

The modeling begins by identifying the functionals that characterize the properties of the fluid involved, see Table 1 in [13]. In particular there are *supply-rate densities* given by $r(x(t)) = \rho$ for the mass and $r(x(t)) = \rho v$ for the momentum with associated *supply-rate functionals* $R[r, \mathbf{v}, A] = -\int_A \rho\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dA$ and $R[r, \mathbf{v}, A] = -\int_A \rho v\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dA$ respectively. Furthermore, each control volume has mass and momentum *storage functionals* $S(x(t))$ denoted as $m = \int_\forall \rho\, d\forall$ and $M = \int_\forall \rho v\, d\forall$ respectively.

At the begining of the injection process, there is a remanent fluid inside the wellbore that defines the initial bottomhole wellbore pressure. As the first injection fluid from the (surface) top side displaces the remanent fluid to the botomhole side, such fluid reaches the bottomhole and it incorporates to the formation around the wellbore. It is therefore convenient to assume an Eulerian Frame attached to both extremes of the tubing. By mass conservation and the Transport Theorem,

$$\frac{d\,m_i}{dt} = \int_{\forall} \rho(v \cdot n) dA \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_m^{\text{in}} & \text{Injection} \\ -Q_m^{\text{wf}} & \text{Ejection} \end{cases} \tag{1}$$

where Q_m^{in} is assumed to be measured by mass flowmeters and Q_m^{wf} can only be predicted by the model. In the middle of the boundaries of the tubing mass is conserved and only changes of pressure, temperature and volume need to be considered. In this conditions assume that a Lagrangean frame is attached to a control volume $\forall_i$ which encloses every fluid i-stage. Between injection and ejection, the total i-stage mass functional $m_i[t]$ remains invariant. We may write then $\frac{D\,m_i}{Dt} = 0$. Nevertheless their fluid properties: density ρ, volume $\forall$, average temperature T_{avg} and pressure P_{avg} may change along the pipeline. For this reason a thermodynamic equation of state (EOS) should be used to predict these properties as function of the local wellbore temperature and pressures. In the case of black-oil simulations, correlations are available, see Table 1.

Table 1. Some sources for fluid properties

Fluid	Property	Method	Source
Nat. gas	Compresibility	Correlation	[2]
Nat. gas	Volume factor	Correlation	[2]
HCl	Viscosity	Table	[16]
N_2	Viscosity	Sutherland	[22]
Foam	Viscosity	Reidenbach	[19]

Proposition 1. *Each fluid block contained in a control volume $\forall_i$ restrained by dissipation, body forces and transfer of momentum as in Figure 1 has a momentum equation expressed by*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - g\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{fv|v|}{2D}. \tag{2}$$

Proof. Consider a control volume $\forall_i$ along a flowline of length ds affected by a body force with associated storage functional $S(x(t)) = W_f = \int_{\forall} \rho f \, d\forall$ for a supply-rate density $r(x(t)) = \rho f$ and supply-rate functional $R[r, \mathbf{v}, A] = -\int_A \rho f \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$. Such body force restrains the associated momentum of $\forall_i$ at the i-stage with a force exerted to the interfaces as pressure given by $f = P/\rho$ and therefore $F_p = \int_A P \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$ and $W_f = \int_{\forall} P \, d\forall$. By conservation of momentum $\frac{DM}{Dt} = F_p + F_\sigma$ *i.e.*

$$\frac{D}{Dt}\int_{\forall} \rho v \, d\forall = \int_A P \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_A (P + \frac{\partial P}{\partial s}) \, ds \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_A \rho\sigma \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

otherwise written (with evident intermediate steps) as

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g\frac{\partial z}{\partial x} - \rho\sigma v \tag{3}$$

where the overall internal dissipating (frictional) forces are assumed to be collected on the term $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} f|v|/2D$. With respect to the Eulerian frame, Eq. (3) reduces to the more familiar momentum equation (2). Finally, express $\partial z/\partial x \stackrel{\text{def}}{=} h\cos(\theta) = h\sin(\psi)$ for each staggered fluid section, see Table 2 for Nomenclature.

3 A singular perturbation viewpoint for reduction of two-phase fluid equations

The simplest theory for two-phase flow is the theory of homogeneous flow, see e.g. [21, 8]. In essence, this theory assumes that such two-phase flow behaves as a pseudofluid obeying the usual one-phase equations (namely, mass, momentum and energy conservation) with *weighted averaged properties* such as velocity, density, temperature and viscosity. Throughout the paper we consider the mean density $\rho_m = \rho_L\alpha_L + \rho_G(1-\alpha_L)$, $0 \leq \alpha_L \leq 1$ and mean viscosity (Cicchitti, [8]) $\mu_m = (1-\mathrm{x})\mu_L + \mathrm{x}\mu_G$, $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$. Since in the oil industry the english unit system is still the most common unit system, in terms of this unit system we write Eqs. (1) and (2) as follows

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t} = -\rho_m\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial\rho_m}{\partial x} \tag{4}$$

$$\epsilon\frac{\partial v}{\partial t} = -v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\rho_m}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{P}{\rho_m A}\tau_w - \frac{\rho_m g}{g_c}\cos\theta, \tag{5}$$

with enthalpy h and the *perturbation parameter* $\epsilon \approx 1$ to be used in the proof of Prop. 2. The well known fact in control theory that the theory of singular perturbations is very

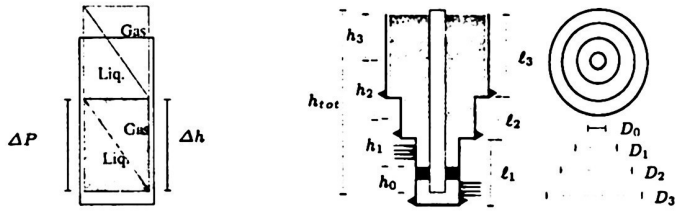


Fig. 2. Conceptual illustration of staggered two-phase blocks and Telescoped tubing

useful for model reduction will be used in Prop. 2 in order to justify a reduced order model for two-phase homogeneous fluids.

3.1 Considerations for incompressible fluids

By defining a control volume moving with the section of fluid injected, the pressure drop including friction effects results in $\Delta P_i = \frac{g}{g_c}\rho h \sin(\frac{\psi\pi}{180}) - \frac{2F_f\rho v^2 h}{g_c D_{tub}}$ with properties obtained from Table 1.

3.2 Considerations for foams

A foam is a dispersion of gas in a solution such that the liquid is the continuous phase and the gas is the discontinuous phase [4]. Foam is used frequently as a diversion fluid for acidizing treatments because is serves for effective placement of the acid. Thus, as the foam stage is traveling along the pipeline its control volume $\forall_{foam}$ is being reduced and the overall contribution to the bottomhole pressure is changed accordingly. Foams are compressible fluids with a rather complex rheological behavior, see [4, 19]. The uncertainty added by the inclusion of such complex fluid increases the difficulty on the estimation of the bottomhole pressure. The rheological properties of foam are dependent of concentration of the surface active agent and temperature. In particular, the apparent viscosity of the foam is usually higher than of each of its constituents and it may decrease with increasing shear rate. It is mostly agreed that foam behaves as a non-newtonian pseudoplastic fluid [4]. In this work we use the *Herschel-Bulkley model* defined by the equation $\tau_{rx} - \tau_y = \mu(-\frac{dv}{dr})^{\frac{1}{m}}$, where τ is the shear stress and the yield stress τ_y is obtained from a flow curve and m and viscosity μ are determined by the slope and intercept of the curve $-\frac{dv}{dr}$ versus $(\tau_{rx} - \tau_y)$. For further information on this model and its parameter adjustment see [10].

3.3 Pressure drop model

In this subsection we formalize the procedure presented by [6] as an interesting particular case of *model reduction of fluidic two-phase systems* based on singular perturbations arguments, see e.g. [11]. One distinctive difference of our approach for the calculation of the foam presure drop with the iterative method of [6] lies on the use of an optimization algorithm running in real-time in order to satisfy exactly the momentum equation implied on the calculation of the pressure drop.

Proposition 2 (Two-phase pressure drop model). *Assume that the variation of fluid velocity v is sufficiently lower than the mass flow variation. Then there exist an integral invariant manifold parametrically described as $\mathcal{M}(P_2, P_1, h_f) = 0$ where*

$$\mathcal{M}(P_2, P_1, h_f) \stackrel{def}{=} \int_{P_1}^{P_2} H(p)dP - K\frac{h_f}{D_{tub}} \tag{6}$$

such that given P_1 the pressure $P_2(P_1, h_f)$ can be determined as a function of the pipeline height h_f by the optimization problem posed as follows

$$\begin{cases} \textit{Minimize} & \mathcal{M}^2(P_2, P_1, h_f) \\ \textit{Restricted to} & h_i \geq 0, \quad \Delta P_i \geq 0, \quad \forall_i \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Proof. The proof is appended at the end of the paper.

Our singular perturbation interpretation seems to be original. In the work oriented to field application by [6], this problem is implemented with an iterative method running along the temporal evolution of the estimation, resulting a poor calculation of P_2. This distinguishes our work where the nonlinear optimization problem determines P_2 and h_f simultaneously. Furthermore since the volume $\forall_{foam}$ can be found from $h_f = \forall_{foam}/A_p$, the problem simplifes to finding a root P_2 to equation $\mathcal{M}(P_2, P_1, h_f) = 0$. We used a modified van Wijngaarden-Dekker-Brent's method as the root-finding algorithm, see e.g. [17]. Notice that this approach is independent of the rheologic model (namely, Power law or Herschel-Bulckley) used to parametrize F_f and μ_{foam}.

4 Volume accommodation inside the wellbore

The transient model for the acid stimulation process reduces to a set of control volumes $\{\forall_0, \forall_1, \ldots \forall_n\}$ containing each of the fluids sequentially introduced in the borehole,– according to the stimulation schedule–, with $\forall_0$ the initial fluid inside the borehole before the stimulation and $\forall_1, \ldots \forall_n$ the subsequent injection fluids.
We assume that real-time measurements of the surface pressure P_{ws} and mass flows Q_m^L Q_m^G are available during all the stimulation. Thus the injected volumes can be determined accurately by integration of the mass flow $\frac{dm_i}{dt} = Q_m|_{in} - Q_m|_{out}$ since $m_i = \rho \forall_i$ and $Q_m = \rho q$, (with q the volume flow), this mass conservation equation simplifies trivially to $\frac{d\forall_i}{dt} = q_{in} - q_{out}$, $i = 1, \ldots, n$ and this calculation is performed sequentially to all the fluids injected to the wellbore.

4.1 Estimation of P_{wfi} from the production tubing pressure

Consider Fig. 1 again. Since the total volume $\forall_{tot}$ of the pipe is limited by its physical dimensions, the total sum of the volumes introduced in the pipe, the height and pressures must satisfy

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = h_{tot}, \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i = P_{wfi}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \forall_i = \forall_{tot} \tag{8}$$

All the remaining fluids exceeding the total volume $\forall_{tot}$ are incorporated to the formation at the lowest extreme of the pipe. The total volume $\forall_{tot}$ determines (along with the pipe inclination and transversal area) the maximum vertical length h_{tot} reached by the fluid column during injection and such value assist in determining the bottomhole pressure during injection P_{wfi}.
The additional difficulty comes when some of the fluids are compressible like foam. As the foam is injected along the pipe, their volume $\forall_{foam}$ is decreasing and satisfaction Eq. (8) obligues to modify the whole calculation of P_{wfi} at every time during the injection. While the properties of foam have been studied for a while [4, 19], it is evident that this is an important source of uncertainty during all the calculations. At the beginning of the estimulation operations the wellbore is filled with a mixture of residual fluids.

Sometimes this residual fluids are the remains of the pre-test operations performed in order to provide an estimate of the permeability, porosity and initial skin. As the stimulation operation begins, these fluids are displaced following the order prescribed in the *stimulation schedule*. Depending on the type of estimulations performed, most frequently this injection is performed from the production line but sometimes this injection is performed from the annular space. In any case, the appropriate height of each fluid volume must be accounted for every pipeline segment diameter.

4.2 Estimation of P_{wf} from the annulus surface pressure

Frequently by economy reasons tubing and annulus are used for production of two different zones of a reservoir [8]. In the situation when the stimulation fluids are injected by the annulus (instead of the production tubing) it is necessary to consider in the model the surface reduction of the annular space in the wellbore for telescoped pipelines, see Figure 2. The procedure for estimation of bottomhole pressure in this case consists of performing the previous procedure for constant transversal area iteratively for each segment ℓ_i of equal transversal area of the pipeline and transfering the excedent volumes to the next segment ℓ_{i-1}.

5 Conclusions

From the viewpoint of state estimators (*observers*), the nonlinear model presented in this paper serves as an open-loop estimator. Clearly the prediction of the bottomhole pressure during injection is suceptible of improvement by the appropriate application of *closed-loop state estimators* in order to predict the remotion of skin despite the modeling uncertainty associated to complex fluids like gelled/emulsified acids and foams.

References

1. A.M. Al-Dhafeeri, T.W. Engler, and H.A. Nasr-El-Din. "Application of two methods to evaluate Matrix Acidizing using Real-time skin effect in Saudi Arabia". In *SPE Int. Symp. & Exhib. Formation Damage Control*, Lafayette, Louisiana, USA, (2002). SPE 73703.
2. H.D. Beggs. *"Production Optimization using NODAL analysis"*. OGCI Pub., Tulsa OK, USA, (1991).
3. C. Crowe, J. Masmonteil, and R. Thomas. "Trends in Matrix Acidizing". *Oilfield Review*, pages 24–40, (1992). October.
4. A. David. *The rheology of foam*. PhD thesis, Stanford Univ., (1969).

Table 2. Nomenclature

q Volume flow $[Bl/D]$	μ Viscosity $[cp]$
s skin factor, $-5 < s < \infty$	x spatial coordinate
α_L liquid volume fraction, $0 < \alpha_L < 1$	x gas mass fraction, $0 < x < 1$

5. D. Eberard, B. Maschke, and A.J. van der Schaft. "Conservative Systems with Ports on Contact Manifolds". In 16th *IFAC World Congress*, Prague, Czech Rep., (2005).
6. E.A. Ejofodomi. Modeling wellbore pressure with application to multistage, acid-stimulation treatment. M.sc. thesis, Texas A&M Univ., (2006).
7. B. Hamroun, L. Lefevre, and E. Mendes. "Port-based Modelling for Open Channel Irrigation Systems". In *Proc. 2nd IASME/WSEAS Int. Conf. Water Res., Hydr. & Hydrol.*, Portoroz, Slovenia, May 15-17 (2007).
8. A.R. Hasan and C. S. Kabir. *Fluid flow and heat transfer in wellbores*. Soc. Petroleum Engrs., Richardson TX, USA, (2002).
9. L. Kalfayan. *Production Enhancement with acid stimulation.* Penwell Books, (2000).
10. V.C. Kelessidis, R. Maglione, C. Tsamantaki, and Aspirtakis. "Optimal determination of rheological parameters for Herschel-Bulkley drilling fluids and impact on Pressure drop, velocity profiles and penetration rates during drilling". *J. Petrol. Sci. & Engng.*, 53(3-4):203–224, (2006).
11. P. V. Kokotovic and P. W. Sauer. "Integral Manifold as a tool for Reduced-Order Modeling of Nonlinear Systems: A Synchronous Machine Case Study". *IEEE Trans. on Circ. and Syst.*, 36(3), (1989).
12. R. Lopezlena. "Real-time computer system for supervision and diagnosis during oilwell acid stimulations". In this Volume, (2008).
13. R. Lopezlena and J.M.A. Scherpen. "On Distributed Port-Hamiltonian Process Systems". In *Proc.* 6th *IFAC Symp. in Nonlin. Cont. Syst. NOLCOS'2004*, Stuttgart, Germany, (2004).
14. B. M. Maschke and A.J. van der Schaft. "From conservation laws to port-Hamiltonian representations of distributed-parameter systems". In 16th *IFAC World Congress*, Prague, Czech Rep., (2005).
15. L.N. Morgenthaler, S.B. Malochee, and C.D. Smith. "Real-time Stimulation Evaluation in Deep Water Completions". In *SPE A. Tech. Conf. Exhib.*, pages 103–109, Dallas,TX,USA, (1995). SPE 30460.
16. J. Nevito-Gomez. Design,set-up and testing of a matrix acidizing apparatus. M.sc. thesis, august, Texas A&M Univ., (2006).
17. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ., USA, 2nd edition, (2002).
18. L.P. Prouvost and M.J. Economides. "Applications of Real-Time Matrix Acidizing Evaluation Method". In *SPE Formation Damage Control Symp.*, Bakersfield CA, USA, (1988). SPE 17156.
19. V.G. Reidenbach, P.C. Harris, Y.N. Lee, and D.L. Lord. "Rheological Study of Foam Fracturing Fluids Using Nitrogen and Carbon Dioxide". In 58th *Ann. Tech. Conf. & Exhib.*, San Francisco, CA, USA, (1983). SPE 12026.
20. A. J. van der Schaft and B. M. Maschke. "Hamiltonian formulation of distributed -parameter systems with boundary energy flow". *J. of Geometry and Physics*, 42:166–194, (2002).
21. G.W. Wallis. *One-dimensional Two-phase flow*. McGraw Hill, New York, U.S.A., (1969).
22. F. M. White. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, Singapore, 2nd edition, (1991).
23. D. Zhu and A.D. Hill. "Field Results Demonstrate Enhanced Matrix Acidizing Through Real-Time Monitoring". *SPE Production & Facilities*, pages 279–284, (1998). SPE 52400.

Proof of Proposition 2

Proof. When the velocity is singularly perturbed by the ϵ-parameter in Eq. (5), we obtain $-\epsilon\frac{\partial v_f}{\partial t} = v_f\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_m}\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_m g\cos\theta + \frac{f}{2D}v^2 \approx 0$. We are interested in characterizing the integrant invariant manifold as $\epsilon \to 0$, expressed in parametrized form as $\mathcal{M}(P_2, P_1, h_f) = 0$. In terms of differentials we may express the latter equation by

$v_f dv_f + \frac{1}{\rho} dP - g dz + \frac{f}{2D} v_f^2 dx = 0$ where $dz = -\sin(\theta) dx$. Since $Q_m = \rho_m v_f A_p$ after substitution it yields $v_f = \frac{Q_m}{\rho_f A} = Q_m \forall_f / A = \frac{Q_m}{A}\left(\frac{a+bP}{P}\right)$ such that $dv_f = -\frac{Q_m a}{AP^2} dP$. We may write otherwise

$$\left[\frac{Q_m a}{g_c A}\frac{(a+bP)}{P}\left(-\frac{Q_m a}{AP^2}dP\right)\right] - \frac{g}{g_c} sen\theta d\ell + \frac{(a+bP)}{P}dP + \frac{2F_f}{Dg_c}\left[\frac{Q_m a}{g_c A}\frac{(a+bP)}{P}\right]^2 d\ell = 0$$

which can be integrated after assuming a drag coefficient independent of x. Let us define $\alpha_0 \stackrel{def}{=} -(Q_m a)^2$, $\alpha_1 \stackrel{def}{=} -Q_m^2 ab$, $\alpha_2 \stackrel{def}{=} a g_c A^2$, $\alpha_3 \stackrel{def}{=} b g_c A^2$, $\beta_1 \stackrel{def}{=} -2(Q_m a)^2 F_f$, $\beta_2 \stackrel{def}{=} -4ab Q_m^2 F_f$ and $\Delta \stackrel{def}{=} D_{tub} g A_p^2 \sin(\frac{\psi\pi}{180}) - 2F_f(bQ_m)^2$. After ordering it yields

$$H(p) = \frac{\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}{\Delta p^3 + \beta_3 p^2 + \beta_1 p}$$

where ψ is the tubing inclination angle. $H(p)$ can be factorized as

$$H(p) = \frac{\frac{\alpha_3}{\Delta}p^3 + \frac{\alpha_3}{\Delta}p^2 + \frac{\alpha_1}{\Delta}p + \frac{\alpha_0}{\Delta}}{p(p^2 + \frac{\beta_3}{\Delta}p + \frac{\beta_1}{\Delta})} = \frac{\frac{\alpha_3}{\Delta}p^3 + \frac{\alpha_3}{\Delta}p^2 + \frac{\alpha_1}{\Delta}p + \frac{\alpha_0}{\Delta}}{p(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)}.$$

In terms of the determinant $\Delta_{det} \stackrel{def}{=} \left(\frac{\beta_2}{2\Delta}\right)^2 - \frac{\beta_1}{\Delta}$, there may exist two solutions.

If $\Delta_{det} > 0$ the roots $\lambda_{1,2} = \frac{-\beta_2}{2\Delta} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{2\Delta}\right)^2 - \frac{\beta_1}{\Delta}}$ allows us to expand $H(p)$ in partial fracctions as

$$H(p) = \frac{\alpha_3}{\Delta} + \frac{\alpha_0}{\lambda_1\lambda_2\Delta}\frac{1}{P} + \frac{\Xi}{P-\lambda_1} + \frac{\Upsilon}{P-\lambda_2}$$

where $\Upsilon \stackrel{def}{=} \frac{\omega_1\lambda_2^2 + \omega_2\lambda_2 + (\alpha_0/\Delta)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}$, $\omega_2 \stackrel{def}{=} \frac{\alpha_1\Delta - \alpha_3\beta_1}{\Delta^2}$, $\Xi \stackrel{def}{=} \frac{\omega_1\lambda_1^2 + \omega_2\lambda_1 + (\alpha_0/\Delta)}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}$ and $\omega_1 \stackrel{def}{=} \frac{\alpha_2\Delta - \alpha_3\beta_2}{\Delta^2}$. Let $K \stackrel{def}{=} \frac{\Delta}{\alpha_3}$, then the defined integral as a function of pressure is written as

$$\frac{1}{K}\int_{P_1}^{P_2} H(p)dP = P_2 - P_1 + N_1 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + N_2 \log\left(\frac{P_2-\lambda_1}{P_1-\lambda_1}\right) + N_3 \log\left(\frac{P_2-\lambda_2}{P_1-\lambda_2}\right)$$

where $N_1 \stackrel{def}{=} \frac{\alpha_0}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, $N_2 \stackrel{def}{=} \frac{\Delta}{\alpha_3}\Xi$ and $N_3 \stackrel{def}{=} \frac{\Delta}{\alpha_3}\Upsilon$ such that one may define the integral in Eq. (6) such that $\mathcal{M}(P_2, P_1, h_f) = 0$ i.e. defines an invariant manifold.

When $\Delta_{det} < 0$ the roots $\lambda_{1,2} = \frac{-\beta_2}{2\Delta} \pm \sqrt{\frac{\beta_1}{\Delta} - \left(\frac{\beta_2}{2\Delta}\right)^2}$ allows us to expand $H(p)$ in partial fracctions as

$$H(p) = \frac{\alpha_3}{\Delta} + \frac{\alpha_0}{\lambda_1\lambda_2\Delta}\frac{1}{P} + \frac{AP+B}{(P^2 - \alpha_2 P + \alpha_1)}$$

The integrals implied in the last expansion are of the type $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c}$ with standard solutions. With similar arguments an equivalent expression for the integral of $H(p)$ is found.

Control de Sistemas Mecánicos

Estimation and analysis of the reachability region in bilinear mechanical systems*

V. R. Nosov, J. A. Meda-Campaña, and J. C. Gómez-Mancilla

SEPI-ESIME-IPN
Unidad Profesional Adolfo López Mateos,
México D.F., México, 07738.
{vnossov,jmedac,jcgomez}@ipn.mx

Abstract. In this paper, the Pontryagin's maximum principle is used to identify the reachability region when a bilinear system with controllable damping and under the influence of a constant force is taken to the origin. The bilinear control problem is partitioned into simpler linear problems. Then, the optimal trajectory is obtained from the adequate combination of the partial solutions. It is also shown that the minimum time is obtained by reaching the origin with the damping active.

1 Introduction

Optimal control is an important area of control theory, which allows designing more efficient and sophisticated systems. Optimal control studies the problem of finding a control law for a given system such that a certain cost function is minimized [1].

Optimization techniques have been widely studied by many authors as Pontryagin [2], Bellmann [3], Bryson and Ho [4], Afanas'ev [5], among many other mathematicians and scientists.

The maximum principle was given by L. S. Pontryagin in 1956. But the mathematical proof appeared a few years later in several works of V. G. Boltyanskii and R. V. Gamkrelidze [2]. This methodology gives necessary conditions to find the optimal control and optimal trajectories considering the initial states of the system.

In previous paper [1] and [5] of one of the authors, the optimal control in bilinear system with controllable damping has been studied. The main result of this paper is that the optimal control of damping has two commutations at most, but excitation force has only one commutation, if any.

It is important to remark that the models considered in these works can be used to analyze fuel optimization in aircraft or automotive systems. The reader

* Work partially supported by scholarships SNI, COFAA and EDI granted by the Mexican Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) and the National Polytechnic Institute (IPN).

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 159-168

is referred to [6] and [7], where extensive lists of applications for bilinear systems are presented.

Besides, many real-life processes can be analyzed through linear approximations. For instance, aerospace and marine navigation systems, thermic systems, biology systems, chemistry and physics systems, robotics, among many others; can be reasonably approximated by linear systems, at least locally [8, 9]. For that reason, we can expect a good performance of the linear controller at least in the approximation region.

In [10], the authors derive a practical approach to obtain optimal controllers based on the maximum principle. This approach is based on the integration of optimal trajectory in inverse time with initial conditions in the origin at arriving time T. In that work, it was considered a system with two controllers, showing that one of the controllers has two commutations at most, while the other one presents one commutation, if any.

The present paper considers a bilinear system subject to constant external force with controllable damping. Therefore, only one control is available. In that sense, the reachability region is estimated and analyzed.

The rest of the paper is organized as follows. Section 2 presents the problem of constructing the optimal controller for systems with controllable damping under the influence of constant force. In sections 3 and 6 the problems without damping and constant damping are analyzed, respectively. The estimation and analysis of reachability region are given in section 5. Finally, some conclusions are drawn in section 6

2 System with controllable damping subject to constant force

Consider the dimensionless bilinear system of one degree of freedom of a material point

$$\ddot{x} + cu\dot{x} = 1, \tag{1}$$

with $c > 0$ as the controllable damping, u as the control, and initial conditions $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

The control goal is to find the reachability region and valid input $u(t)$ such that

$$0 \leq u(t) \leq 1,$$

and the system (1) converges to the origin, i.e., $x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$; where T is the minimum possible time.

This bilinear system can be rewritten as follows

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2}$$

$$\dot{x}_2 = 1 - cux_2, \tag{3}$$

where $x_1 = x$, $\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}$ and $\dot{x}_2 = \ddot{x}$.

The Hamiltonian can be defined as

$$H(x, u, \psi) = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2(1 - cux_2),$$

while the adjoint variable vector $\psi = [\psi_1 \ \ \psi_2]^T$ is obtained from

$$\psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{4}$$

On the other hand, the optimal control is obtained as follows [5, 9]

$$u = \max_{0 \le u \le 1}(H) = \max_{0 \le u \le 1}(-c\psi_2 u x_2) = \frac{1 - \text{sign}(\psi_2 x_2)}{2}. \tag{5}$$

It is clear that control u has a commutation if adjoint variable ψ_2 or velocity x_2 pass through zero.

Consequently, the optimal trajectory is determined when the following aggregate nonlinear system is solved

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{6}$$

$$\dot{x}_2 = 1 + c\frac{1 - \text{sign}(\psi_2 x_2)}{2} x_2 \tag{7}$$

$$\dot{\psi}_1 = 0 \tag{8}$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 + c\psi_2 \frac{1 - \text{sign}(\psi_2 x_2)}{2} \tag{9}$$

subject to $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = \dot{x}_0$, $x_1(T) = 0$ and $x_2(T) = 0$, where T is the arriving time to the origin.

As can be easily seen, the search for T must to be performed before the latter system can be solved.

However, because of the existence of only one control, the reachability region is reduced. This fact will be analyzed through the following sections by partitioning the original problem in linear problems, using a similar method to that presented in [10].

3 System without damping subject to constant force

Consider the dimensionless linear system of one degree of freedom without damping

$$\ddot{x} = 1, \tag{10}$$

with $x(0) = x_0$ and $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, which can be rewritten as

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{11}$$

$$\dot{x}_2 = 1, \tag{12}$$

where $x_1 = x$, $\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}$ and $\dot{x}_2 = \ddot{x}$.

Notice that this system is not controllable. Therefore, initial state must satisfy certain conditions in order to reach the origin. Such conditions will be clarified below.

The solution for system (11)–(12) is

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + \dot{x}_0 t + x_0 \tag{13}$$

$$x_2(t) = t + \dot{x}_0. \tag{14}$$

The curves crossing through the origin are defined by integrating equations (11)–(12) in inverse time and by assuming that at the arriving time (T), the system is at the origin, i.e., $x(T) = \dot{x}(T) = 0$. Thus,

$$x_{c1}(t) = \frac{(t-T)^2}{2} \tag{15}$$

$$x_{c2}(t) = (t-T). \tag{16}$$

We use x_{c*} to describe arrival curves, which later will become in commutation curves for suitable values of $*$.

Consequently, system (10) can only arrive to the origin when initial state are on curves (15)–(16). These are the conditions mentioned earlier.

4 System with damping and constant external force

Consider now the dimensionless linear system of one degree of freedom with constat damping

$$\ddot{x} + c\dot{x} = 1, \tag{17}$$

with $x(0) = x_0$ and $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, and where $c > 0$ is the constant damping of the system.

This system can be rewritten as

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{18}$$

$$\dot{x}_2 = 1 - cx_2, \tag{19}$$

where $x_1 = x$, $\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}$ and $\dot{x}_2 = \ddot{x}$.

Again, system (17) is not controllable. Therefore, initial state must satisfy similar conditions to those given before in order to reach the origin.

The solution for system (18)–(19) is

$$x_1(t) = \frac{t}{c} - \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c^2} e^{-ct} + \left(x_0 + \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c^2} \right) \tag{20}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{c} + \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c} e^{-ct}, \tag{21}$$

Once more, the arriving lines are obtained by integrating equations (18)–(19) using inverse time and by assuming that at instant T (arriving time), the system

is at the origin. Resulting,

$$x_{c1}(t) = \frac{(t-T)}{c} + \frac{e^{-c(t-T)} - 1}{c^2} \tag{22}$$

$$x_{c2}(t) = \frac{1}{c}(1 - e^{-c(t-T)}), \tag{23}$$

with x_{c*} defined as above.

As consequence, system (17) can only arrive to the origin when initial state are on curves (22)–(23).

With this in mind, the problem of finding the optimal control for system (2)–(3) is reduced to find the correct combination of the partial solutions derived so far.

5 Reachability region and optimal trajectories

In this section, the results obtained earlier are applied to determine the reachability region and the optimal trajectory in order to take system (1) to the origin.

Figure 1 shows the reachability region lines for systems without damping ($c = 0$) and with damping $c = 4$. From this graphic, it can be readily concluded that the origin can be only reach by a system with initial conditions between curves without damping and with damping. This is due to the existence of only one controller in system 1, which is the controllable damping.

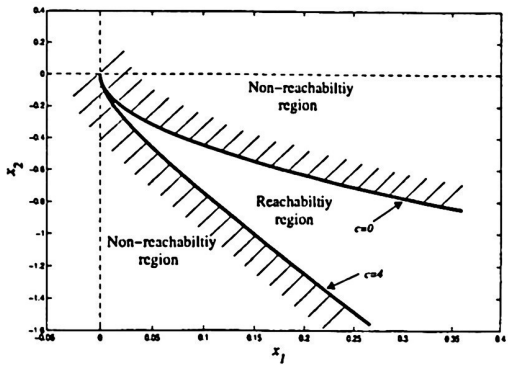


Fig. 1. Reachability and non-reachability regions for systems without damping $c = 0$ and with damping $c = 4$.

In words, if system (1) starts outside the reachability region we can only activate (or deactivate) the controllable damping. As a result, the trajectory

will be parallel to the arrival curve for the system with damping (or without damping). Therefore, although velocity x_2 will be zero at some instant, the displacement x_1 will not be zero; and the system would not reach the origin.

However, if system (1) starts inside the reachability region we have two options:

1) At start, to deactivate the controllable damping. Then, wait for the intersection of the trajectory (for this case, curve without damping) and the curve corresponding to the system with damping. At this very moment, the controllable damping must to be activated. In this case the systems reach the origin on the curve with damping.
2) At start, to activate the controllable damping. Then, wait for the intersection of the trajectory (for this case, curve with damping) and the curve corresponding to a damping-less system. At that very moment, the controllable damping has to be deactivated. In this case the systems reach the origin on the curve without damping.

Then, there are two trajectories for every staring point inside the reachability region. This means that the system can arrive to the origin with $u = 0$ or $u = 1$. In order to find the commutation time t_1 and arrival time T, we use a similar approach to that presented in [10].

To determine t_1 and T, while reaching the origin on the curve with constant damping, we need to solve the simultaneous equations generated by matching equations (13), (22) and (14), (23), i.e.,

$$\frac{t_1^2}{2} + \dot{x}_0 t_1 + x_0 = \frac{(t_1 - T)}{c} + \frac{e^{-c(t_1-T)} - 1}{c^2} \tag{24}$$

$$t_1 + \dot{x}_0 = \frac{1}{c}(1 - e^{-c(t_1-T)}), \tag{25}$$

with t_1 and T as unknowns.

After simple algebraic manipulation from equation (25), we have

$$1 - e^{(-c(t_1-T))} = ct_1 + c\dot{x}_0, \tag{26}$$

then, substituting (26) in (24), yields

$$\frac{t_1^2}{2} + \dot{x}_0 t_1 + x_0 = \frac{(t_1 - T)}{c} - \frac{ct_1 + c\dot{x}_0}{c^2} \tag{27}$$

$$= \frac{(t_1 - T)}{c} - \frac{t_1}{c} - \frac{\dot{x}_0}{c}. \tag{28}$$

Finally,

$$T = -\frac{ct_1^2}{2} - c\dot{x}_0 t_1 - cx_0 - \dot{x}_0, \tag{29}$$

$$t_1 = \frac{1}{c}\left(1 - e^{-c(t_1 + \frac{ct_1^2}{2} + c\dot{x}_0 t_1 + cx_0 + \dot{x}_0)}\right). \tag{30}$$

Now, equations (29) and (30) can be solved by means of any mathematical software.

Likewise, if we want to reach the origin on curve without damping, then t_1 and T can be determined by solving simultaneous equations generated by matching equations (15), (20) and (16), (21), i.e.,

$$\frac{t_1}{c} - \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c^2}e^{-ct_1} + \left(x_0 + \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c^2}\right) = \frac{(t_1 - T)^2}{2} \tag{31}$$

$$\frac{1}{c} + \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c}e^{-c_1 t} = t_1 - T. \tag{32}$$

Thus, substituting (32) in equation (31) gives

$$T = t_1 - \frac{1}{c} - \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c}e^{-c_1 t}, \tag{33}$$

$$\frac{t_1}{c} = \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c^2}e^{-ct_1} - \left(x_0 + \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c^2}\right) + \frac{(\frac{1}{c} + \frac{c\dot{x}_0 - 1}{c}e^{-c_1 t})^2}{2}. \tag{34}$$

As in the previous case, these equations can be solved using any mathematical tool.

Now, we are able to compute the trajectories for any staring point inside the reachability region.

Considering system (1) with $c = 4$ and initial conditions $x_0 = 0.2$ and $\dot{x}_0 = -0.8$. The trajectory to the origin, using the constant damping arrival curve, appears in figure 2. For this case, $t_1 = 0.1691$ and $T = 0.4839$.

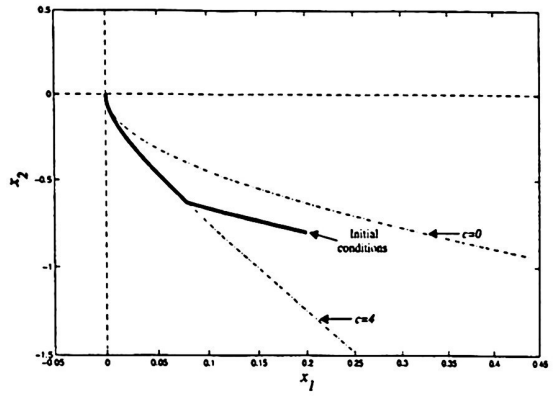


Fig. 2. Optimal trajectory with $c = 4$, $x_0 = 0.2$ and $\dot{x}_0 = -0.8$, reaching the origin on the curve for constant damping.

Now, we solve the problem under the same conditions, but assuming that the system reach the origin without damping. The trajectory for this situation is

depicted in figure 3. Under this configuration, $t_1 = 0.0653$ and $T = 0.6238$. This suggests that the best option reaching the origin with damping. The following table is intended to illustrate this fact.

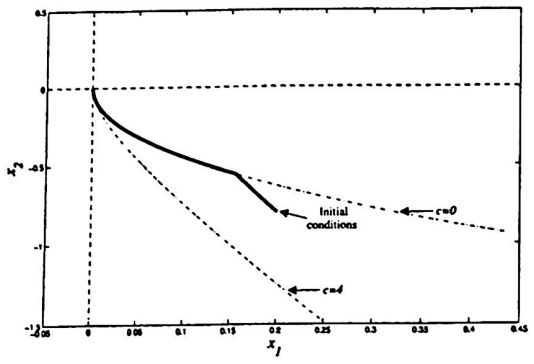


Fig. 3. Another possible trajectory with $c = 4$, $x_0 = 0.2$ and $\dot{x}_0 = -0.8$, reaching the origin without damping.

Table 1 shows the arrival times for different initial conditions inside the reachability region, when the reaching curve is either without damping or with constant damping.

Table 1. Optimal time for system (1) with $c = 4$.

	Reaching curve	
Initial conditions	without damping	constant damping
$x(0) = 0.11031; \dot{x}(0) = -0.8$	0.3590	0.3587
$x(0) = 0.15; \dot{x}(0) = -0.8$	0.5198	0.4106
$x(0) = 0.2; \dot{x}(0) = -0.8$	0.6238	0.4839
$x(0) = 0.25; \dot{x}(0) = -0.8$	0.7049	0.5719
$x(0) = 0.3; \dot{x}(0) = -0.8$	0.7744	0.6947
$x(0) = 0.32; \dot{x}(0) = -0.8$	0.8	0.7999

Notice that in every case, reaching the origin with the controllable damping activated results in the minimum time [1, 5, 10].

After a little deeper analysis, it can be deduced that if the initial conditions are on one of the arriving curves then the system cannot leave such line in order to reach the origin.

It is also important to remark that the first row of table 1 corresponds to initial conditions very close of the arriving curve with constant damping $c = 4$; while the last row corresponds to initial condition very close of the arriving curve without damping. Therefore, for the same initial velocity ($\dot{x}_0 = -0.8$ in this case), the minimum time is achieved when initial conditions are on the constant damping arrival curve, from table 1 the shortest arrival time is around $T = 0.3587$. On the other hand, the longest time is around $T = 0.8$, and it is obtained when the initial conditions are on the arrival curve without damping. So, if equation 1 represents an automobile brake system and the initial conditions are inside the reachability region. It can be concluded that applying the brakes at the end of the trajectory will result in stopping the vehicle after traveling the desired distance using the minimum time.

Thus, for a given $\dot{x}_0 < 0$, we have a reachability region $x_{\min}(0) \leq x(0) \leq x_{\max}(0)$, as shown in figure 4.

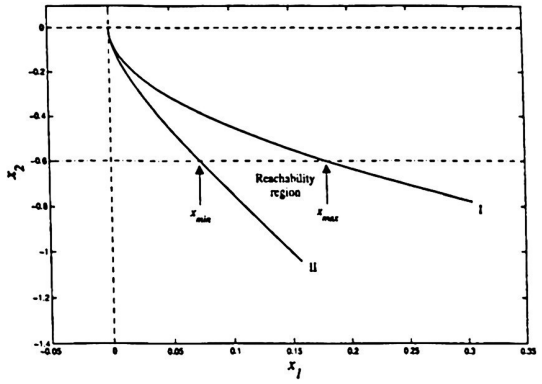


Fig. 4. Reachability region for a given velocity $\dot{x}_0 < 0$.

Therefore, on curve I (without damping) $x(0) = \frac{\dot{x}(0)}{2}$, from (15) and (16). While, on curve II (with constant damping) $x(0) = -\frac{\dot{x}(0)}{c} - \frac{1}{c^2}\ln(1-c\dot{x}(0))$, from (22) and (23). Resulting $-\frac{\dot{x}(0)}{c} - \frac{1}{c^2}\ln(1-c\dot{x}(0)) \leq x(0) \leq \frac{\dot{x}(0)}{2}$, for $\dot{x}(0) < 0$.

This equation allows to compute valid values of $x(0)$ in order to start inside the reachability region for a given velocity $\dot{x}(0) < 0$ and controllable damping $c > 0$. Table 2 summarizes some results for different values of $\dot{x}(0)$ and c.Now, it is clear that for a given $\dot{x}(0)$, $x_{\min}(0) \to 0$ as $c \to \infty$.

Table 2. Estimation of reachability region.

c	1		2		10	
$\dot{x}(0)$	$x_{\min}(0)$	$x_{\max}(0)$	$x_{\min}(0)$	$x_{\max}(0)$	$x_{\min}(0)$	$x_{\max}(0)$
-0.5	0.0945	0.125	0.0767	0.125	0.0320	0.125
-1	0.3069	0.5	0.2253	0.5	0.0760	0.5
-10	7.6021	50	4.2389	50	0.9538	50

6 Conclusions

In this paper, it has been analyzed the reachability region for a bilinear system subject to constant force with controllable damping. The study was carried out on the basis of the decomposition of the original problem in two parts, namely: 1) systems without damping subject to constant force and 2) systems with constant damping subject to constant force. The partition considered allows determining the reachability region in a simpler and practical way. Figures and tables illustrate the validity of the approach. It was also shown that the activation of the controllable damping at the end of the trajectory results in minimum arriving time. Another important outcome of this analysis is that the inclusion of controllable damping in control systems may increase the durability of the system, because the damping component is not active during the entire trajectory of the material point.

References

1. V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov, "Control in one bilinear system," *Izvestia AN USSR, Tech. Cybern.*, no. 9, 1990.
2. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidge, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* New York: Interscience Publishers, Inc., 1962.
3. R. E. Bellman and S. E. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming.* Princeton, New Jersey: Princeton University press, 1962.
4. A. E. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control.* Toronto-London: Blaisdell Publishers, 1969.
5. V. N. Afanas'ev, V. B. Kolmanovskii, and V. R. Nosov, *Mathematical Theory of Control Systems Design.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
6. D. L. Elliott, *Bilinear Systems in Encyclopedia of Electrical Engineering.* New York: Wiley, 1999.
7. R. R. Mohler, *Nonlinear Systems: Volume I, Dynamics and Control, Volume II, Applications to Bilinear Control.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
8. T. Kailath, *Linear Systems.* New Jersey: Prentice–Hall, Inc., 1980.
9. G. M. Siouris, *An Engineering Approach to Optimal Control and Estimation Theory.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1992.
10. V. R. Nosov, J. A. Meda-Campaña, and J. C. Gomez-Mancilla, "Optimal control of external force and damping in one mechanical system," *5th CCE 2008 (To appear).*

Instalación experimental para estudiar la interacción llanta-pavimento*

Jeannete Aguilar-Martínez** y Luis Alvarez-Icaza***

Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacán DF, México

Resumen En este artículo se describe el diseño una instalación experimental para estudiar el fenómeno de fricción entre llanta y pavimento. Se estudia el problema de la dinámica de la tracción y frenado a través de modelos dinámicos de fricción. Estos utilizan el modelo de LuGre (Canudas de Wit, C. *et al.*, 1995). Se presentan algoritmos de control para el movimiento del mismo y resultados de simulación.
Palabras clave fricción llanta-pavimento; modelos dinámicos de fricción; banco de pruebas.

1. Introducción

Los distintos estudios a propósito de la fricción llanta-pavimento han hecho énfasis en el uso de modelos pseudoestáticos. En particular, la llamada "fórmula mágica" (Bakker, E. *et al.*, 1987), es un modelo que reproduce el coeficiente de fricción contra el deslizamiento. Los modelos pseudoestáticos tienen limitaciones importantes: son difíciles de caracterizar y carecen de una base física. Por esta razón, se introdujeron los modelos dinámicos de fricción que se han usado para describir la fricción llanta-pavimento con mayor detalle. En este artículo se presenta el diseño de una instalación a pequeña escala para estudiar la interacción llanta-pavimento que permitirá estudiar con más detalle el uso de modelos dinámicos de fricción para control de tracción y frenado.

2. Modelo matemático de un cuarto de vehículo

La dinámica longitudinal de un vehículo utiliza un modelo de solo un cuarto de vehículo. Este tipo de modelo ha sido ya usado por otros autores como por ejemplo (Kiencke, U., 1993), (Kiencke, U. y Daiss, A., 1994), (Liu, Y. y Sun, J., 1995). Para describir el movimiento longitudinal de un cuarto de vehículo se utiliza el siguiente modelo

$$m\dot{v} = 4F_x - F_{ax} \tag{1}$$

* Investigación patrocinada por el proyecto CONACYT 47583 y el proyecto UNAM-PAPIIT IN117108
** Estudiante de posgrado, JAguilarM@iingen.unam.mx
*** Investigador y corresponsal, alvar@punas.iingen.unam.mx

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 169-178

donde m es la masa del vehículo, v la velocidad longitudinal del vehículo, F_x la fuerza entre la llanta y el pavimento y F_{ax} la fuerza aerodinámica de arrastre, que puede escribirse como

$$F_{ax} = C_{ax}v^2 \tag{2}$$

donde C_{ax} es el coeficiente aerodinámico que depende del área longitudinal efectiva, la densidad del aire y la forma del vehículo. La fuerza de fricción llanta-pavimento puede expresarse de la siguiente manera

$$F_x = -\mu F_n \tag{3}$$

donde μ es el coeficiente de fricción llanta-pavimento y $F_n = \frac{mg}{4}$ es la fuerza normal en cada llanta. La dinámica rotacional de la llanta está descrita por

$$I_1\dot{w}_1 = \tau_m - \tau_b - F_xR_1 \tag{4}$$

donde $\dot{w}_1$ es la aceleración angular, I_1 es la inercia de la llanta, τ_m es el par de impulso, τ_b es el par de frenado y R_1 es el radio efectivo de la llanta. El banco estará constituido por un rodillo y una llanta. Se ha supuesto que el rodillo se comporte como el pavimento y que también represente la masa del vehículo. La llanta está acoplada al eje de un motor de corriente directa sin trasmisión. El radio del rodillo está dado por R_2, ω_2 es la velocidad angular del rodillo e I_2 es la inercia del rodillo (ver Fig. 1). La dinámica rotacional del rodillo que está

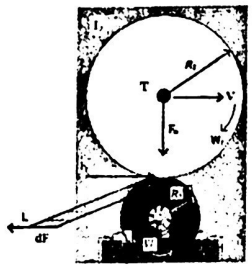


Figura 1. Diagrama del banco para estudiar la fricción llanta-pavimento.

dada por

$$I_2\dot{w}_2 = F_xR_2 - F_{ax}R_2 \tag{5}$$

De las Ecs. (1) y (4) se puede establecer que la velocidad angular w_1 y la velocidad angular w_2 están relacionadas a través de la velocidad relativa definida como

$$s = R_2w_2 - R_1w_1 \tag{6}$$

Tomando la derivada de la Ec. (6) y al hacer $\tau = \tau_m - \tau_b$ se tiene la siguiente expresión

$$\dot{s} = R_2[-\mu\frac{mg}{4}\frac{R_2}{I_2} - C_{ax}v^2\frac{R_2}{R_2}] - R_1[\frac{\tau}{I_1} + \mu\frac{mg}{4}\frac{R_1}{I_1}] \tag{7}$$

Al tomar las Ecs. (2) y (3) y sustituir en las Ec. (1), la dinámica del vehículo se puede expresar como

$$\dot{v} = -a\mu - bv^2 \tag{8}$$

$$\dot{s} = -(a+c)\mu - bv^2 - d\tau \tag{9}$$

donde $a = \frac{mg}{4}\frac{R_2^2}{I_2}$, $b = C_{ax}\frac{R_2^2}{I_2}$, $c = \frac{mg}{4}\frac{R_1^2}{I_1}$ y $d = \frac{R_1^2}{I_1}$.

3. Modelo dinámico de fricción

En (Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P., 1999) se proponen modelos dinámicos de fricción basados en el modelo de LuGre que se utilizan como base para este artículo. Este modelo supone que las superficies hacen contacto a través de cerdas erizadas elásticas y cuando se aplica una fuerza tangencial las cerdas se deforman como resortes, lo que hace que la fuerza de fricción aumente hasta llegar a un punto donde ocurre deslizamiento. El modelo está dado por

$$\frac{dz}{dt} = s - \frac{\sigma_0|s|}{g(s)}z \tag{10}$$

$$\mu = \frac{F_x}{F_n} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \tag{11}$$

donde s es la velocidad relativa entre las superficies (llanta-pavimento) y z es un estado interno que representa la deformación promedio de las cerdas. Los parámetros σ_0, σ_1 y σ_2 representan respectivamente la rigidez, el amortiguamiento y la fricción viscosa entre las superficies y F_n es la fuerza normal. Para modelar y describir el fenómeno "Stribeck"((Armstrong-Hélouvry, B., 1991) y (Canudas de Wit, C. *et al.*, 1995)) se utiliza la siguiente fórmula

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c)e^{-(\frac{s}{v_s})^{\frac{1}{2}}} \tag{12}$$

donde μ_c es la fuerza de Coulomb, μ_s es el nivel de la fuerza de fricción estática y v_s es la velocidad "Stribeck". El modelo representado en las Ecs. (10), (11) y (12) es un modelo con parámetros concentrados y tiene como hipótesis que la interfase llanta-pavimento es puntual.

4. Modelo dinámico del motor de corriente directa y del sistema electro-mecánico

Las ecuaciones que caracterizan al modelo matemático de un motor de corriente directa son las de del circuito eléctrico y equilibrio de pares, respectivamente

$$V_e = L\frac{di_\mu}{dt} + Ri_a + K_f\omega_1$$

$$J_{eq}\dot{\omega}_1 = K_m i_a - \tau_b$$

Donde V_e es el voltaje de entrada, L la inductancia eléctrica, R la resistencia eléctrica, i_a la corriente de armadura, τ_b el par de frenado, ω_1 la velocidad angular del eje del motor, J_{eq} el momento de inercia equivalente, y K_m, K_f constantes apropiadas. Para obtener el modelo dinámico del sistema completo se recurre a la Fig. 2 que muestra el sistema electro-mecánico. Partiendo del modelo estándar

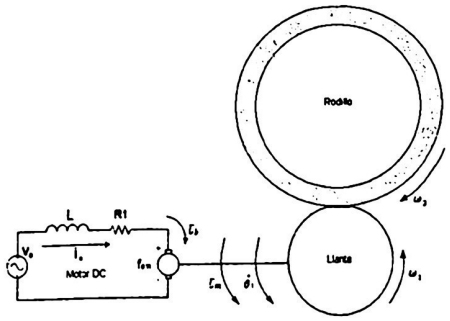


Figura 2. Sistema electro-mecánico.

del motor de corriente directa, se obtiene

$$L\frac{d}{dt}i_a = -Ri_a - K_f\omega_1 + V_e \tag{13}$$

Sustituyendo la Ec. (3) y el par de frenado en la Ec. (4), se tiene

$$I_1\dot{w}_1 = \tau_m - B\omega_1 + \mu\frac{mg}{4}R_1 \tag{14}$$

y sustituyendo las Ecs. (2) y (3) en la dinámica rotacional del rodillo se obtiene

$$I_2\dot{w}_2 = \mu\frac{mg}{4}R_2 - C_{ax}v^2R_2 \tag{15}$$

En este modelo se considera $\mu = g(s)sgn(s) + \sigma_2 s$, donde $g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c)e^{-|\frac{s}{v_s}|^{\frac{1}{2}}}$, esta última ecuación es una parametrización del efecto "Stribeck". Este nuevo modelo pretende capturar fenómenos de fricción a bajas velocidades, así como predecir fenómenos de histéresis.

5. Trayectorias deseadas

Para conseguir el control de tracción y frenado fue necesario fijar trayectorias de referencia a partir de la velocidad deseada v_d, puede expresarse como

$$v_d = R_2\omega_{2d}$$

donde ω_{2d} es la velocidad angular deseada que se puede conocer a partir de v_d. Conociendo v_d y ω_{2d} y al usar la Ec. (5), se puede conocer el coeficiente de fricción deseado, dado por

$$\mu_d = -\frac{4}{R_2 mg}[I_2\dot{\omega}_{2d} + C_{ax}v_d^2] \tag{16}$$

Si se asume que $\dot{z}$ es nula[1] de la Ec.(10), donde $z_d = \frac{g(s_d)}{\sigma_0}sgn(sd)$, es el estado interno de equilibrio de la Ec. (11), entonces se deduce la velocidad relativa deseada s_d entre las superficies llanta-pavimento, dada por

$$s_d = \frac{1}{\sigma_2}[(-\frac{4}{R_2 mg}[I_2\dot{\omega}_{2d} + C_{ax}v_d^2]) - \sigma_0 z_d] \tag{17}$$

Por lo tanto se puede conocer $\dot{\omega}_{1d}$ de la Ec. (6), quedando como

$$\dot{\omega}_{1d} = \frac{R_2}{R_1}\dot{\omega}_{2d} - \frac{1}{R_1}\dot{s}_d \tag{18}$$

De la Ec. (4) se puede deducir el torque del motor deseado τ_{md} en función de ω_{1d}

$$\tau_{md} = I_1\dot{\omega}_{1d} + \mu_d\frac{mg_t}{4}\frac{R_1}{I_1}$$

y con ello la corriente deseada i_{ad}, expresada como

$$i_{ad} = \frac{\tau_{md}}{K_m} = \frac{1}{K_m}\left[I_1\dot{\omega}_{1d} + \mu_d\frac{mg}{4}\frac{R_1}{I_1}\right] \tag{19}$$

Finalmente el voltaje deseado V_{ed}, se expresa como

$$V_{ed} = L\frac{d}{dt}i_{ad} + Ri_{ad} + K_f\omega_{1d} \tag{20}$$

Una vez encontradas las trayectorias deseadas que logran que el frenado o tracción sea congruente se puede diseñar un controlador con el modelo dinámico.

[1] Lo que implica suponer que la dinámica de z es más rápida que la de s.

6. Ley de control para el sistema electro-mecánico

El objetivo principal del controlador es comprobar la estabilidad del seguimiento de las trayectorias para el sistema, para ello se utiliza teoría de Lyapunov. Se parte de la Ec. (15) rescrita como

$$\dot{\omega}_2 = \mu\frac{mgR_2}{4I_2} - \frac{C_{ax}}{I_2}R_2^2\omega_2^2 \tag{21}$$

Al tomar la Ec. (14) y despejando $\dot{\omega}_1$, se tiene

$$\dot{\omega}_1 = \frac{K_m}{I_1}i_a - \frac{B}{I_1}\omega_1 - \mu\frac{mg}{4I_1}R_1 \tag{22}$$

A partir de las ecuaciones anteriores, se puede obtener la derivada de la velocidad relativa, que es

$$\dot{s} = \mu\frac{mgl}{4}\left[\frac{R_2^2}{I_2} + \frac{R_1^2}{I_1}\right] + \frac{R_1}{I_1}\left[B\omega_1 - K_m i_a\right] - \frac{R_2}{I_2}C_{ax}R_2^2\omega_2^2 \tag{23}$$

Por otro lado, al despejar la velocidad angular de la llanta, de la ecuación de la velocidad relativa, Ec. (6), ésta se puede escribir como

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1}\omega_2 - \frac{1}{R_1}s \tag{24}$$

Al despejar de la Ec. (13) $\frac{d}{dt}i_a$, se tiene

$$\frac{d}{dt}i_a = -\frac{R}{L}i_a - \frac{K_f}{L}\left[\frac{R_1}{R_2}\omega_2 - \frac{1}{R_1}s\right] + \frac{V_e}{L} \tag{25}$$

Por lo tanto el sistema sobre el que se diseñará la ley de control está descrito por

$$\dot{\omega}_2 = C_1\mu - C_2\omega_2^2 \tag{26}$$

$$\dot{s} = C_3\mu - C_4\omega_2^2 + C_5\omega_2 - C_6 s - C_7 i_a \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt}i_a = -C_9\omega_2 - C_8 i_a + C_{10}s + C_{11}V_e \tag{28}$$

donde $C_1 = \frac{mgR_2}{4I_2}$, $C_2 = \frac{C_{ax}}{I_2}R_2^2$, $C_3 = \frac{mg}{4}\left[\frac{R_2^2}{I_2} + \frac{R_1^2}{I_1}\right]$, $C_4 = \frac{R_2^3}{I_2}C_{ax}$, $C_5 = \frac{R_2}{I_1}B$, $C_6 = \frac{1}{I_1}B$, $C_7 = \frac{R_1}{I_1}K_m$, $C_8 = \frac{R}{L}$, $C_9 = \frac{K_f}{L}\left[\frac{R_1}{R_2}\right]$, $C_{10} = \frac{K_f}{L}\left[\frac{1}{R_1}\right]$ y $C_{11} = \frac{1}{L}$. Los errores de seguimiento para la velocidad angular ω_2, velocidad relativa s y corriente i_a están definidos respectivamente como:

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{2d}, \quad \tilde{s} = s - s_d \quad \text{y} \quad \tilde{i}_a = i_a - i_{ad}$$

donde ω_{2d}, s_d y i_{ad} son los valores deseados para ω_2, s e i_a.

De las Ecs. (25), (26) y (27) se obtiene la dinámica del error de seguimiento, que puede expresarse como

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = -C_1[\mu] - C_2\omega_2^2 - \dot{\omega}_{2d} \tag{29}$$

$$\dot{\tilde{s}} = -C_3[\mu] - C_4\omega_2^2 + C_5\omega_2 - C_6 s + C_7 i_a - \dot{s}_d \tag{30}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{i}_a = -C_8 i_a - C_9\omega_2 + C_{10} s + C_{11} V_e - \frac{d}{dt} i_{ad} \tag{31}$$

Ahora μ depende únicamente de la velocidad relativa s. Para desarrollar la ley de control para el seguimiento de trayectorias del sistema propuesto se utiliza teoría de Lyapunov y la técnica de Backstepping. Se define primero

$$W_2 = \frac{1}{2}\gamma_2 \tilde{s}^2 \tag{32}$$

Se inicia con la derivada de la Ec. (31) y se sustituye la Ec. (29) en ella para obtener

$$\dot{W}_2 = \gamma_2 \tilde{s}[C_3\mu - C_4\omega_2^2 + C_5\omega_2 - C_6 s - C_7 i_a - \dot{s}_d] \tag{33}$$

Se utiliza Backstepping, por ello se asume que i_a actúa por ahora como control.

Por lo tanto, seleccionando i_a de la Ec. (32), la que se denotará como i'_a

$$i'_a = \frac{1}{C_7}[C_3\mu + C_4\omega_2^2 - C_5\omega_2 + C_6 s + \dot{s}_d - f\tilde{s}] \tag{34}$$

que incluye un término de corrección de error $f\tilde{s}$.

Al sustituir la Ec. (33) en (32), se tiene

$$\dot{W}_2 = -\gamma_2 f \tilde{s}^2 \tag{35}$$

Entonces, $\tilde{s} = 0$, es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{s} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} s = \lim_{t\to\infty} s_d$$

Como en realidad i'_a no es el control, entonces se puede definir una variable de error $\tilde{z} = i_a - i'_a \quad \rightarrow \quad i_a = \tilde{z} + i'_a$ y derivando $\tilde{z}$ con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\tilde{z} = \frac{d}{dt} i_a - \frac{d}{dt} i'_a \tag{36}$$

Al sustituir $\frac{d}{dt} i_a$ y $\frac{d}{dt} i'_a$ en la Ec. (35), se tiene

$$\frac{d}{dt}\tilde{z} = -C_8 i_a - C_9\omega_2 + C_{10} s + C_{11} V_e - \frac{d}{dt} i'_a \tag{37}$$

Por otro lado se define

$$W_c = W_2 + \frac{1}{2}\tilde{z}^2 \tag{38}$$

Derivando la Ec. (37), se obtiene

$$\dot{W}_c = \dot{W}_2 + \frac{d}{dt}\tilde{z} = \dot{W}_2 + \tilde{z}[-C_8(\tilde{z} + i'_a) - C_9\omega_2 + C_{10}s + C_{11}V_e - \frac{d}{dt}i'_a] \quad (39)$$

Se selecciona V_e de la Ec. (38), que es la variable de control, como

$$V_e = \frac{1}{C_{11}}[C_8 i'_a + C_9\omega_2 - C_{10}s + \frac{d}{dt}i'_a - \beta\tilde{z}] \quad (40)$$

que incluye un término de error de corrección $\beta\tilde{z}$. Introduciendo la ecuación de el voltaje V_e en la Ec. (38), se tiene

$$\dot{W}_c = \dot{W}_2 - \beta\tilde{z}^2 - C_8\tilde{z}^2 = -\gamma_2 f\tilde{s}_2 - (C_8 + \beta)\tilde{z}^2 \quad (41)$$

Lo que prueba que $\tilde{z} \to 0$, asintóticamente. Entonces $i_a = i'_a$.

Ahora se analiza la estabilidad de $\tilde{\omega}_2 = 0$, derivando la ecuación el error de la velocidad angular, se tiene

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_{2d} \quad (42)$$

sustituyendo $\dot{\omega}_{2d}$ en (28), se obtiene

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = -C_1(\mu - \mu_d) - C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2 \quad (43)$$

donde $(\omega_2 + \omega_{2d}) > 0$, por diseño.

En la Ec. (42) el término $(\mu - \mu_d)$ es acotado y uniformemente continuo, por lo que no hay tiempo de escape finito pues $\mu - \mu_d$ es uniformemente continua, μ y μ_d son acotadas. Además $-C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2$ es Lipschitz en $\tilde{\omega}_2$. Para un tiempo suficientemente grande, se tiene que

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 \approx -C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2$$

entonces

$$\tilde{\omega}_2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 \to \omega_{2d}$$

Así queda demostrado que se obtiene estabilidad asintótica para $\tilde{i}_a = 0$, $\tilde{s} = 0$ y $\tilde{\omega}_2 = 0$, con la ley de control propuesta V_e.

7. Resultados de las simulaciones

Los resultados describen el comportamiento del vehículo cuando éste realiza varias maniobras. Las simulaciones se realizan con base en el juego de parámetros propuesto en (Aguilar, J.G., 2008). La siguiente simulación muestra como señal de referencia (v_d), una función senoidal, el controlador tiene como objetivo seguir la trayectoria deseada durante todo el proceso.

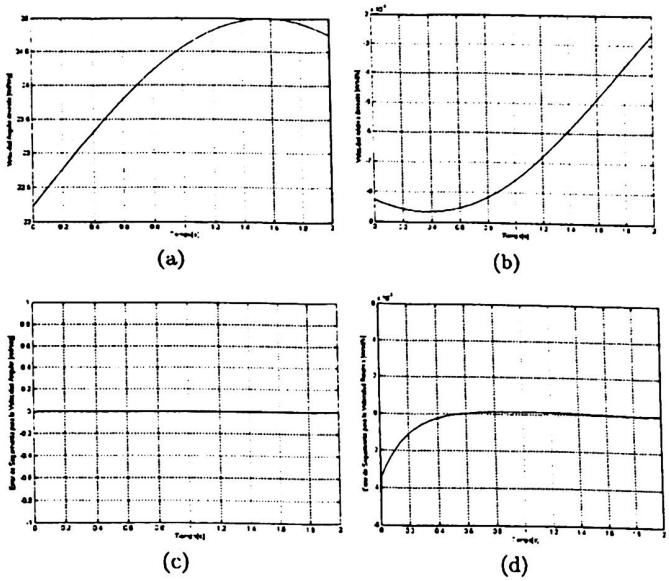


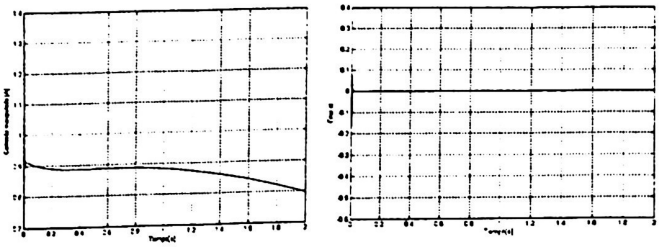
Figura 3. Resultados de simulación. a) Velocidad angular deseada ω_{2d}, b) Velocidad relativa deseada s_d, c) Error de seguimiento en la velocidad angular $\tilde{\omega}_2$, d) Error de seguimiento en la velocidad relativa $\tilde{s}$.

Las Figs. 3(a) y 3(c) muestran la velocidad angular deseada ω_{2d} y el error de seguimiento en la velocidad angular $\tilde{\omega}_2$, mientras que las Figs. 3(b) y 3(d) la velocidad relativa deseada s_d y el error de seguimiento en la velocidad relativa $\tilde{s}$.

La Fig. 4(a) muestra la corriente manipulada i'_a y la Fig. 4(b) el error de seguimiento en la corriente $\tilde{z}$.

8. Conclusiones

Se obtuvieron modelos matemáticos para la interacción llanta-pavimento en un modelo de un cuarto de vehículo, con los que se pueden diseñar leyes de tracción y frenado para poder controlar la velocidad relativa en la superficie de contacto. Se obtuvieron trayectorias deseadas basadas en el modelo dinámico del vehículo. Se diseñó una ley de control para el sistema electro-mecánico con base en técnicas de Lyapunov que resuelve el problema de control de seguimiento de trayectorias deseadas para un vehículo en regímenes de tracción y frenado. Finalmente, se presentaron los resultados de simulación que muestran un buen desempeño de los modelos dinámicos y del controlador.



(a) (b)

Figura 4. Resultados de simulación. a) Corriente deseada i'_a, b) Error de seguimiento en corriente $\tilde{z}$

Referencias

Aguilar, J.G. (2008). Diseño de una instalación experimental para estudiar la interacción llanta-pavimento. Tesis de maestría. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Armstrong-Hélouvry, B. (1991). *Control of machines with friction.* Kluwer Academic Publishers. USA.

Bakker, E., Nyborg, L. y Pacejka, H. (1987). Tyre modeling for use in vehicle dynamic studies. *SAE* p. Paper # 870421.

Canudas de Wit, C., Astrom, K.S. Olsson, K. y Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40(3), 419–425.

Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999). Dynamic tire friction models for vehicle traction control.. En: *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix Arizona USA.*

Kiencke, U. (1993). Realtime estimation of adhesion characteristic between tyres and road. En: *Proceedings of the IFAC World Congress.* Vol. 1. pp. 15–18.

Kiencke, U. y Daiss, A. (1994). Estimation of tyre friction for enhaced ABS-systems. En: *In Proceedings of the AVEG'94.*

Liu, Y. y Sun, J. (1995). Target slip tracking using gain-scheduling for antilock braking systems. En: *In The American Control Conference, Seattle, Washington.* pp. 1178–82.

Control Basado en Pasividad de un doble péndulo subactuado con efectos de fricción dinámicos*

Cecilia Cornejo-Romero** y Luis Alvarez-Icaza ***

Instituto de Ingeniería,
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyacán DF, México

Resumen Se presenta el modelo dinámico en ecuaciones Hamiltonias controladas por puerto (EHCP) de un doble péndulo subactuado, al que se incorpora un modelo de fricción dinámico no lineal para describir la fricción en las articulaciones. Con base en el modelo, se diseña un controlador basado en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento (CBP-AIA), que tiene una acción global sobre el sistema. Se incluyen resultados de simulación.
Palabras clave sistemas subactuados; fricción no lineal; Control Basado en Pasividad

1. Introducción

La técnica de modelado de sistemas por ecuaciones Hamiltonias controladas por puerto (EHCP) busca analizar su comportamiento desde una perspectiva de intercambio de energía y a partir de ella identificar que elementos permiten llevar a cabo una manipulación de la energía del sistema con el objeto de lograr un comportamiento deseado (Ortega, R. *et al.*, 2002).

Esta técnica se ha usado con buen éxito para el modelado y control de sistemas mecánicos (Ortega, R. *et al.*, 2001). Sin embargo, la inclusión de los efectos de fricción en sistemas mecánicos en el marco de EHCP se ha limitado a incluir efectos lineales de fricción viscosa (Acosta J. A. *et al.*, 2005) y ha ignorado los efectos de fricción dinámica no lineales que son comunes en esta clase de sistemas. Una de las razones para esto estriba en las dificultades modelar estos efectos en el marco de EHCP.

En este trabajo se propone un modelo de fricción dinámico, desarrollado a partir del modelo de LuGre (Canudas de Wit y Olsson H., 1995) y de evidencia experimental (Jiménez, R. y Álvarez, L., 2005), que describe la fricción dinámica en las uniones de un manipulador robótico. Las coordenadas generalizadas del modelo se extienden para incluir los estados internos asociados con los modelos dinámicos de fricción. La estructura resultante preserva las propiedades de los sistemas en EHCP, es decir, pasividad y estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de energía mínima.

* Investigación patrocinada mediante convenio CONACyT 47583 y UNAM-DGAPA-PAPIIT IN117108.
** Estudiante de posgrado CCornejoR@iingen.unam.mx
*** Investigador y corresponsal alvar@pumas.iingen.unam.mx

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 179-188

El modelo en ECHP con efectos de fricción se desarrolla para el caso particular de un doble péndulo subactuado con fricción no lineal en las articulaciones y, a partir de la técnica de Control Basado en Pasividad por Asignación de Interconexión y Amortiguamiento (CBP-AIA), se diseña una ley de control que permite estabilizar el péndulo en el punto de equilibrio inestable en lazo abierto.

La estructuración del trabajo es la siguiente. En la sección dos se describe el modelo de fricción no lineal y en la sección tres se resume la técnica de modelado por EHCP, incluyendo el modelo de fricción dinámico. En la sección cuatro se presenta el diseño de la ley de control por CBP-AIA, y en la sección cinco se presentan los resultados de simulación. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo y la dirección para trabajo futuro.

2. Descripción del modelo de fricción dinámico

La fricción se presenta cuando se producen fuerzas tangenciales por el contacto de superficies sólidas sobre las que actúan fuerzas normales. Algunos elementos que caracterizan la fricción son las propiedades de volumen de los cuerpos: dureza, fragilidad, parámetros térmicos y parámetros elásticos (módulo de Young, módulo de corte, energía elástica almacenada, entre otros) y las propiedades de las superficie: las reacciones químicas de la superficie con el ambiente, peliculas o capas de sustrato aplicadas para reducir la fricción, etc. Algunos fenómenos asociados a la fricción son particularmente difíciles de representar. Entre ellos se encuentra el efecto Stribeck, cuyo comportamiento describe la transición de fricción estática a fricción dinámica y que se representa en la Fig. 1.

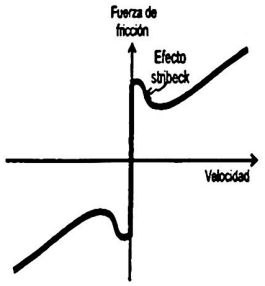


Figura 1. Curva de fricción vs. velocidad que muestra el efecto Stribeck.

Los modelos dinámicos de fricción proponen una visión microscópica para analizar este fenómeno. Así, a estos modelos se les asocia un estado interno que describe la deformación promedio de las imperfecciones microscópicas del material en la zona de contacto. A las imperfecciones se les denomina cerdas o peines, por la similitud de su

comportamiento mecánico con el de objetos con estas formas geométricas, que primero se deforman y luego se deslizan[1].

Los modelos más dinámicos de fricción más populares para fines de control son el modelo de (Dahl, 1976) y el modelo de LuGre (Canudas de Wit y Olsson H., 1995), que tiene la siguiente estructura

$$F_{fr} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{s} \tag{1}$$

$$\dot{z} = \dot{s} - \frac{\sigma_0 \|\dot{s}\| z}{g(s)} \tag{2}$$

donde F_{fr} es la fuerza de fricción, $\dot{s}$ es la velocidad relativa de las superficies en contacto, z es el estado interno de deformación promedio de las cerdas, σ_i con constantes convenientes y $g(s)$ es un función incluida para describir el efecto Stribeck.

Desde el punto de vista de las EHCP, resulta claro que el modelo de LuGre no presenta efectos acoplados entre la velocidad relativa de movimiento de la superficie y la de deformación de las cerdas. Este tipo de términos corresponde a los términos de Coriolis en las formulaciones dinámicas de sistemas mecánicos. Para poder incluir estos efectos, en este artículo se propone modificar el modelo de LuGre para darle la siguiente estructura

$$F_{fr} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{s} - \sigma_1 a_2 \|\dot{s}\| \dot{s} \tag{3}$$

$$\dot{z} = \dot{s} + a_2 \|\dot{s}\| \dot{s} - \frac{a_2 \sigma_0}{\sigma_1} \|\dot{s}\| z \tag{4}$$

con a_2 una constante.

Al sustituir (4) en (3) y simplificar se obtiene

$$F_{fr} = \sigma_0 z + (\sigma_1 + \sigma_2)\, \dot{s} - a_2 \sigma_0 \|\dot{s}\| z \tag{5}$$

Es también posible expresar (4) y (5) en la siguiente forma, que resultará de utilidad más adelante

$$\begin{bmatrix} -F_{fr} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 & -a_2 \|\dot{s}\| \\ -a_2 \|\dot{s}\| & \frac{a_2}{\sigma_1} \|\dot{s}\| \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \sigma_0 z \end{bmatrix} \tag{6}$$

El funcionamiento de este modelo fue comprobado con datos experimentales obtenidos del comportamiento de un amortiguador magnetoreológico en (Jiménez, R. y Álvarez, L., 2005).

3. Ecuaciones Hamiltonianas Controladas por Puerto

Las EHCP permiten modelar dinámicas de sistema de parámetros concentrados de tal forma que la estructura de las ecuaciones del modelo permite evidenciar la interconexión y la disipación de energía en el sistema (Ortega *et al.*, 1998). Otra ventaja

[1] Ver (Armstrong Hélouvry B. *et al.*, 1994) para un resumen extensivo de distintos modelos de fricción.

al utilizar está metodología es que la conexión en configuración de retroalimenteación de sistemas modelados en EHCP genera un sistema que conserva las propiedades intrínsecas de las EHCP, además de permitir aplicar CBP-AIA de forma más simple. Una forma general de las EHCP es

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)]\frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \tag{7}$$

$$y = g^T(x)\frac{\partial H}{\partial x}(x) \tag{8}$$

donde $x \in \Re^n$ es vector de estados, $J(x) = -J(x)^T$es la matriz de interconexión, $R(x) = R(x)^T \geq 0$ es la matriz de amortiguamiento, $H(x)$ es la función de almacenamiento de energía y u, y son la entrada y la salida, respectivamente cuyo producto genera unidades de potencia.

El sistema en (7) y (8) es pasivo de u a y con $H(x)$ la función de almacenamiento de energía pues satisface

$$\underbrace{H[x(t)] - H[x(0)]}_{\text{energía-almacenada}} = \underbrace{\int_0^t u^T(t)y(t)dt}_{\text{fuente-de-energía}} - \underbrace{d(t).}_{\text{energía-disipada}}$$

con $d(t)$ la función que captura los efectos de disipación del sistema.

Cuando no se ejerce acción de control, $(u = 0)$, la función $H(x)$ es no incremental, esto es $H[x(t)] \leq H[x(0)]$, y decreciente en la presencia de disipación. Si la función de energía es acotada por debajo, el sistema se estabiliza en el equilibrio. Además, si $H(x)$ es no negativa se tiene $-\int_0^t u(t)y(t)dt \leq H[x(0)] < \infty$, que muestra que la energía que el sistema puede disipar es acotada.

3.1. Dinámica del doble péndulo con fricción dinámica en EHCP

En la figura 2 se presenta el diagrama de cuerpo libre de un doble péndulo con actuación sólo en la primera articulación. Para este sistema mecánico, cuando no se consideran efectos dinámicos de fricción, el modelo en EHCP tiene como estados la posiciones angulares $[q_1 \quad q_2]^T$ y el momento angular $[p_1 \quad p_2]^T$. La función de energía es

$$H = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + U(q)$$

donde $\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p$ es la energía cinética y $U(q)$ la energía potencial del sistema. Adicionalmente se presenta la siguiente relación que es útil para el modelado del sistema

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = M^{-1}p = \begin{bmatrix} \mu_{11}(q) & \mu_{12}(q) \\ \mu_{21}(q) & \mu_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

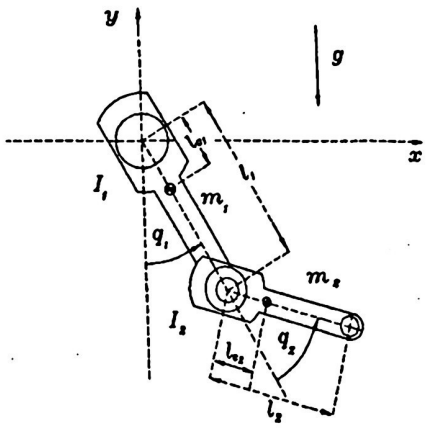


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de un manipulador de dos grados de libertad

Cuando se incorporan los efectos dinámicos de fricción, se debe incorporar un estado interno, z_i, con dinámica dada por (4), donde $\dot{s} = \dot{q}_i$ y un juego de constantes para cada articulación. La función de energía se modifica para incluir la energía potencial de estos estados internos para quedar como

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g cos(q_1)$$
$$-m_2 g l_{c2} cos(q_1 + q_2) + \frac{1}{2}\sigma_0 z_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_0 z_2^2 \qquad (10)$$

A partir de (10), al seguir la forma general en (7) y utilizar (9) se obtiene el modelo dinámico del manipulador que se presenta en (11).

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 & -a_2\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & -a_2\Upsilon \\ 0 & 0 & -a_2\Lambda & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2\Upsilon & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}\Upsilon \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \\ \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ \nabla_{z_1} H \\ \nabla_{z_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (11)$$

donde: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, $\Lambda = |\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_2|$, $\Upsilon = |\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2|$.

4. Diseño de una ley de CBP-AIA

Para el diseño de la ley de control se propone una dinámica deseada en EHCP para el sistema en lazo cerrado de la forma

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)]\frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \tag{12}$$

con elementos que aseguren que $J_d(x) = -J_d^T(x)$ (matriz antisimética de interconexión deseada), $R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0$ (matriz de amortiguamiento deseada), H_d con mínimo en x_* (función de almacenamiento de energía deseada) y x_* el punto de equilibrio deseado para el sistema en lazo cerrado.

Existen varias metodologías para el diseño de leyes de CBP-AIA. Una de ellas consiste en diseñar el sistema de lazo cerrado de acuerdo con la siguiente

Proposición 1 *(Ortega, R. et al., 2002) Dados $J(x)$, $R(x)$, $H(x)$, $g(x)$ y el punto de equilibrio deseado a ser estabilizado $x_* \epsilon R^n$, asumir que se pueden encontrar las funciones $\beta(x)$ $J_a(x)$ $R_a(x)$ y el vector $\varkappa(x)$ que satisgan*

$$[J(x) + J_a - (R(x) + R_a(x))]\varkappa(x) = -[J_a(s) - R_a(x)]\frac{\partial H_d}{\partial x}(x)$$

donde J_a es la asignación de interconexión, R_a la asignación de amortiguamiento, H_a la función de almacenamiento de energía deseada y $\beta(x)$ la ley de control, tal que se asegure:

- *Preservación de estructura*
- *Integrabilidad*
- *Asignación de equilibrio*
- *Estabilidad de Lyapunov*

Bajo estas condiciones, la ley de control $u = \beta(x)$ proporciona un sistema de lazo cerrado (12)*, cuya función de almacenamiento de energia es de la forma*

$$H_d(x) = H(x) + H_a(x) \tag{13}$$

además se cumple que

$$\frac{\partial H_a}{\partial x}(x) = \varkappa(x) \tag{14}$$

El equilibrio en lazo cerrado está dado por

$$x_* = \left\{ x \epsilon R^n \middle| \left[\frac{\partial H_d}{\partial x}\right]^T R_d \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) = 0 \right\} \tag{15}$$

y el estimado del dominio de atracción está dado por $\{x \epsilon R^n | H_d(x) \leq c\}$. □

A partir de la dinámica de la planta descrita por la ecuación (7) y el sistema deseado en lazo cerrado dado por (20) La ley de CBP-AIA está dada por

$$\beta(x) = [g^T(x)g(x)]^{-1}g^T(x)\{[J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_a - [J_a(x) - R_a(x)]\nabla H(x)\} \tag{16}$$

donde se debe satisfacer además una condición de aparejamiento[2].

[2] Ver (Ortega, R. *et al.*, 2002) para más detalles.

4.1. Ley de CBP-AIA para el doble péndulo con fricción dinámica

Para el caso del doble péndulo es posible demostrar que si el punto de equilibrio deseado en lazo cerrado corresponde con la posición erguida vertical, entonces las siguientes asignaciones satisfacen los requisitos de la proposición

$$H_d = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g cos(q_1) + m_2 g l_{c2} cos(q_1 + q_2) + \frac{1}{2}\sigma_0 z_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_0 z_2^2 \tag{17}$$

$$R_d = R + \begin{bmatrix} R_{11d} & R_{12d} \\ R_{12d} & R_{22d} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Donde la ley de CBP-AIA es

$$\beta(x) = \frac{1}{\tau}\{2(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g\, sen(q_1) + 2 m_2 l_{c2} sen(q_1 + q_2) + R_{11d}(\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_{12}) + R_{12d}(\mu_{21} p_1 + \mu_{12} p_{22})\} \tag{19}$$

La dinámica de lazo cerrado, después de realizar las sustituciones correspondientes en (17) se muestra en (20).

Al comparar las Ecs. (20) y (11), se observa la introducción de los términos R_{11d}, R_{12d} y R_{22d} asociados a la asignación de amortiguamiento extra en el sistema de lazo cerrado.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11d} + \sigma & R_{12d} & -a_2\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & R_{21d} & R_{22d} + \sigma & 0 & -a_2\Upsilon \\ 0 & 0 & -a_2\Lambda & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2\Upsilon & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}\Upsilon \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \\ \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ \nabla_{z_1} H \\ \nabla_{z_2} H \end{bmatrix} \tag{20}$$

5. Resultados de simulación

En esta sección se presentan los resultados de un experimento realizado por simulación que consiste en mostrar que la ley de CBP-AIA puede llevar al doble péndulo a la posición erguida vertical. Se proponen como condiciones iniciales que el primer brazo se localice a 36° y que la posición angular del segundo brazo sea 18°, según el sistema de referencia mostrado en la figura 2.

Las figuras 3 y 4 muestran la trayectoria de los dos brazos del péndulo doble. Se observa que ambos brazos se encuentran cerca de la posición inferior de acuerdo con el sistema de referencia adoptado y que al entrar en acción la ley de CBP-AIA los brazos llegan a la posición vertical superior. La ley de control empleada para el único actuador en el primer brazo se muestra en la figura 5. Es importante notar que esta ley de control es continua y que no es necesario usar una ley conmutada (Aracil J. y Gordillo F., 2005) para primero impulsar el doble péndulo y luego estabilizarlo en la posición de equilibrio inestable en lazo abierto.

6. Conclusiones y trabajo futuro

Se han incluido efectos dinámicos de fricción para sistemas mecánicos modelados en el marco de ECHP. Para ello se propuso una modificación al modelo dinámico de fricción de LuGre que permite incorporar los estados internos de dicho modelo en el marco del modelo dinámico en EHCP. Esta modificación permite asegurar las propiedades de pasividad inherentes a esta formulación. Se aplicó esta formulación para el caso de un péndulo doble subactuado con efectos dinámicos de fricción en las articulaciones. A partir de este modelo en EHCP se ha propuesto una ley de control global diseñada por la metodología de CBP-AIA que estabiliza al doble péndulo en la posición vertical erguida en lazo cerrado. Esta ley evita la solución tradicional al problema de control del doble péndulo erguido que consiste en recurrir a la conmutación entre dos leyes de control (Aracil J. y Gordillo F., 2005); la primera de ellas proporciona un fuerte impulso inicial y la otra se utiliza cuando el doble péndulo se encuentra en una vecindad de la posición erguida. Queda aún por verificar experimentalmente los resultados obtenidos por simulación.

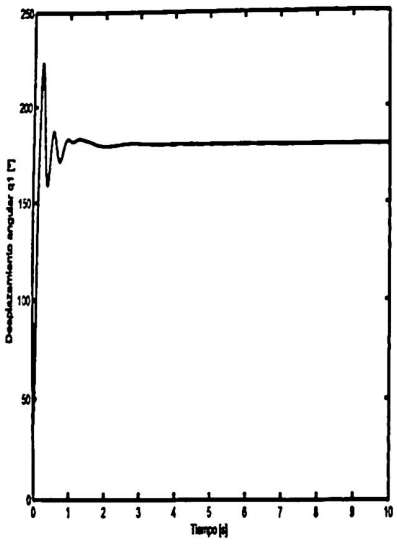


Figura 3. Desplazamiento angular brazo 1

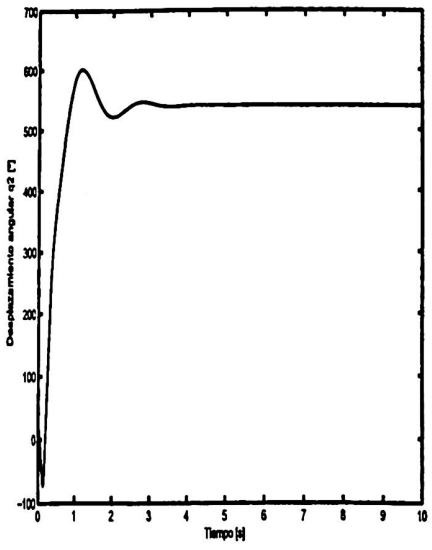


Figura 4. Desplazamiento angular brazo 2

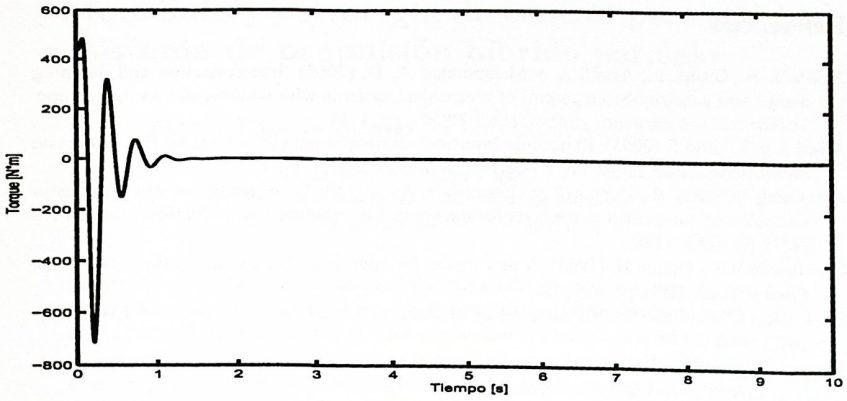


Figura 5. Ley de control

Parámetros amortiguador	
σ_2	$0{,}2[N \cdot s/m]$
σ_1	$0{,}1[N \cdot s/m]$
σ_0	$1x10^{-4}[N/(V \cdot m)]$
a_2	$1x10^{-4}[s/m]$

Parámetros del robot		
l_1	0,450	$[m]$
l_2	0,450	$[m]$
l_{c1}	0,091	$[m]$
l_{c2}	0,048	$[m]$
m_1	23,902	$[kg]$
m_2	3,880	$[kg]$
I_1	1,226	$[kg \cdot m^2]$
I_2	0,093	$[kg \cdot m^2]$
g	9,81	$[m/s^2]$

Matriz de inercia,de Coriolis y vector de gravedad.

$$
\begin{aligned}
M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} cos(q_2) + I_1 + I_2 \\
M_{12}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} cos(q_2) + I_2 \\
M_{21}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} cos(q_2) + I_2 \\
M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\
C_{11}(q) &= -m_2 l_1 l_{c2} sen_{q_2}(\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2) \\
C_{12}(q) &= -m_2 l_1 l_{c2} sen_{q_2}[(\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_2) + (\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2)] \\
C_{21}(q) &= m_2 l_1 l_{c2} sen_{q_2}(\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_2) \\
C_{22}(q) &= 0 \\
g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g sen(q_1) + m_2 g l_{c2} sen(q_1 + q_2) \\
g_2(q) &= m_2 g l_{c2} sen(q_1 + q_2)
\end{aligned}
$$

Referencias

Acosta J. A., Ortega R., Astolfi A. y Mahindrakar A. D. (2005). Interconection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *Transactions on automatic control, IEEE* **20**(12), pp. 1–17.

Aracil J. y Gordillo F. (2005). El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. *Revista Iberoamericana de Automética e Informatica industrial* **2**(2), pp. 8–19.

Armstrong Hélouvry B., Dupont P. y Canudas de Wit C. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* **30**(7), pp. 1083–1138.

Canudas de Wit y Olsson H. (1995). A new model for control systems with friction. *Automatic Control, IEEE* **41**(3), pp. 419–425.

Dahl, P.R. (1976). Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal* **14**(12), pp. 1675–1682.

Jiménez, R. y Álvarez, L. (2005). LuGre friction model for a magnetorheological damper. *Structural Control and Health Monitoring* **12**(1), 91–116.

Ortega, R., A. Loría, P.Ñicklasson y H. Sira-Ramírez (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer. Great Britain.

Ortega, R., Van der Schaft, A., Bernhard, M. y Escobar, G. (2002). Interconection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica* **38**(4), pp. 585–596.

Ortega, R., Van der Schaft, A. J., Mareels, I. y Maschke B. (2001). Putting energy back in control. *Control Systems Magazine, IEEE* **21**(2), pp. 18–33.

Modelado y estrategia de control para un sistema de propulsión híbrido paralelo*

Alfonso Pantoja-Vázquez** y Luis Alvarez-Icaza***

Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacán DF, México

Resumen Se desarrolla un modelo matemático para un sistema de propulsión híbrido paralelo que consiste en un motor de combustión interna encendido por chispa, una máquina eléctrica asociada a un sistema de baterías y un acoplamiento mecánico. Se presenta un algoritmo de control para el flujo de potencia basado en reglas. Los resultados de simulación sobre ciclos estándares de manejo demuestran la eficacia de la estrategia de control.

1. Introducción

La búsqueda de tecnologías para economizar combustible, reducir emisiones contaminantes y proporcionar vehículos más atractivos al consumidor, sin sacrificar desempeño, seguridad, rentabilidad ha promovido el desarrollo de la propulsión híbrida (Schouten *et al.*, 2002). Una de las motivaciones ha sido el limitado rango de movilidad provisto por las baterías de los vehículos puramente eléctricos (Powell *et al.*, 1998). Al incluir una fuente de energía auxiliar, como un motor de combustión interna (MCI), se puede extender sustancialmente dicho rango, mejorar el rendimiento del vehículo y minimizar las emisiones contaminantes.

Los vehículos híbridos usan al menos dos fuentes de energía para su propulsión; generalmente, la combinación de una máquina eléctrica (ME) y un MCI (Delprat *et al.*, 2004). Con la ME se ayuda a mantener al MCI en su intervalo de funcionamiento óptimo y también se puede recobrar energía cinética durante el frenado, mientras que con el MCI se obtiene, en caso de estar disponible, potencia para hacer funcionar la ME como generador y cargar así las baterías, necesarias para la operación de la ME.

Un algoritmo de control debe determinar la cantidad de potencia que aporta cada una de las dos fuentes de energía(Lin *et al.*, 2003). Debe también indicar cuando cargar las baterías o usar frenado regenerativo. En general el algoritmo de control influye directamente en la eficiencia del vehículo.

Las estrategias de control para la administración del flujo de potencia pueden ser clasificadas en tres categorías: a) técnicas de control heurísticas, como control

* Investigación patrocinada mediante convenios CONACYT 47583 y UNAM-DGAPA-PAPIIT IN117108.

** Estudiante de posgrado, actualmente en Delphi S.A.; alfonso.pantoja@delphi.com

*** Investigador y corresponsal; alvar@iingen.unam.mx

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 189-198

basado en reglas, lógica difusa y redes neuronales (Schouten *et al.*, 2002; Ippolito *et al.*, 2003; Langari y Won, 2003; Koo *et al.*, 1998), b) técnicas de optimización por programación dinámica (Sciarretta *et al.*, 2004; Lin *et al.*, 2003; Delprat *et al.*, 2004; Sebastien *et al.*, 2001) y c) métodos basados en la conversión de la potencia eléctrica en su equivalente de consumo de combustible (Paganelli *et al.*, 2002).

En este trabajo se desarrolla un modelo dinámico de un sistema de propulsión híbrido útil para simulaciones y se diseña un algoritmo de control de potencia. El esquema completo se prueba en simulaciones de ciclos de manejo estándares para ciudad y carretera.

2. Modelado del tren de propulsión híbrido-paralelo

La configuración de un vehículo híbrido paralelo tiene la capacidad de funcionar con el motor eléctrico, con el motor de combustión interna o con ambos. Tiene, además, capacidad de frenado regenerativo. La configuración paralela fue elegida sobre la configuración serie pues esta tiene limitaciones en altas demandas de potencia.

2.1. Motor de combustión interna

En este trabajo se usó un modelo reducido de un MCI (Cho y Hedrick, 1989). Este modelo tiene tres estados que son: la masa de aire en el múltiple de entrada, la velocidad del motor y el flujo de combustible. Además incorpora un retraso de la admisión de aire a la producción de par y otro de la chispa a la producción de par. Hay tres posibles variables de control: el ángulo del acelerador, la relación aire combustible y el avance de la chispa de ignición.

La ecuación de estado para la masa de aire en el múltiple de entrada se obtiene al considerar la conservación de masa (Cho y Hedrick, 1989)

$$\dot{m}_a = \dot{m}_{ai} - \dot{m}_{ao} \tag{1}$$

donde $\dot{m}_{ai}$ es el flujo másico que entra al múltiple de admisión y $\dot{m}_{ao}$ el flujo másico que sale de este múltiple y entra a la cámara de combustión.

El flujo másico entra en el múltiple de entrada se modela como

$$\dot{m}_{ai} = MAX \cdot TC \cdot PRI \tag{2}$$

donde MAX es el flujo máximo, TC la caracterización normalizada del acelerador, y PRI la influencia normalizada de la presión. El flujo máximo se obtiene al abrir completamente el acelerador para flujo estrangulado[1]. La caracterización normalizada del acelerador es una función del ángulo del acelerador, α, que se puede representar con la siguiente ecuación

$$\mathrm{TC} = \begin{cases} 1 - \bar{t}c \text{ para } \alpha \leq 79{,}46^o \\ 1 \quad\quad \text{para } \alpha > 79{,}46^o \end{cases} \tag{3}$$

[1] Para el motor que se está modelando, $MAX = 0{,}1843$Kg/s.

donde $\bar{t}c = \cos 1{,}14459 \cdot \alpha - 1{,}0600$.

La influencia normalizada de la presión está en función de la relación entre la presión del múltiple y la presión atmosférica, se puede usar la siguiente ecuación

$$PRI = 1 - \exp\left(9\left(\frac{P_m}{P_{atm}} - 1\right)\right) \tag{4}$$

donde la presión del múltiple de entrada, P_m, y la masa de aire del múltiple de entrada, m_a, se relacionan por la ley de gases ideales (Cho y Hedrick, 1989), P_{atm} es la presión atmosférica.

La cantidad de flujo de masa que entra en la cámara de combustión es

$$\dot{m}_{ao} = c_1 \eta_{vol} m_a \omega_e \tag{5}$$

donde ω_e es la velocidad del motor, y c_1 es una constante física definida como $c_1 = V_e/4\pi V_m$ donde V_e es el desplazamiento del motor, V_m el volumen del múltiple de entrada[2]. Para la eficiencia volumétrica, η_{vol}, se usa la siguiente expresión empírica (Cho y Hedrick, 1989)

$$\eta_{vol} = \left(24{,}5\omega_e - 3{,}1\,10^4\right) m_a{}^2 + \left(-0{,}167\omega_e + 222\right) m_a + \left(8{,}1\,10^{-4}\omega_e + 0{,}352\right) \tag{6}$$

El segundo estado está asociado con el flujo de combustible. Cualquier método de inyección de combustible da como resultado la combinación de un retraso fijo y de un retraso variable. Por simplicidad, en (Cho y Hedrick, 1989) los dos efectos son combinados en un retraso de primer orden de la forma

$$\tau_f \dot{m}_{fi} + \dot{m}_{fi} = \dot{m}_{fc} \tag{7}$$

donde $\dot{m}_{fi}$ es la relación actual de combustible entrando a la cámara de combustión, y τ_f es la constante de tiempo efectiva de la inyección de combustible se modela como

$$\tau_f = 0{,}050 + \frac{1{,}5\pi}{\omega_e} \cdot \frac{\dot{m}_{fc} \cdot \beta}{\text{MAX}} \tag{8}$$

El tercer estado está relacionado con la dinámica de los elementos rotacionales de un MCI y es modelado como

$$I_e \cdot \dot{\omega}_e = T_i - T_f - T_a \tag{9}$$

donde T_i es el par del motor, T_f es la fricción del motor, T_a es el par debido a los accesorios e I_e la inercia efectiva del motor y accesorios[3].

El proceso de producción de par del MCI es un evento discreto, pero puede ser modelado en el dominio continuo del tiempo como

$$T_i = c_T \cdot \frac{\dot{m}_{ao}(t - \Delta t_{it})}{\omega_e(t - \Delta t_{it})} \cdot \text{IAC}(t - \Delta t_{ti}) \cdot \text{ICH}(t - \Delta t_{st}) \tag{10}$$

[2] Para el motor usado $V_e = 0{,}0038\text{m}^3$ y $V_m = 0{,}0027\text{m}^3$.

[3] $I_e = 0{,}1454$ Kg m^2 para el MCI de interés (Cho y Hedrick, 1989).

La influencia normalizada de aire combustible (IAC) es una función de la relación aire combustible (A/C) y se puede usar la siguiente aproximación (Cho y Hedrick, 1989)

$$\text{IAC} = \cos(7{,}3834 \cdot (\text{A/C} - 13{,}5)) \tag{11}$$

La influencia normalizada de la chispa (ICH) es una función del avance/retroceso de la chispa que se obtiene de MMP (mínimo avance de chispa para un mejor par) y se modela con la siguiente función

$$\text{ICH} = (\cos(\text{ACH-MMP}))^{2{,}875} \tag{12}$$

donde ACH es el avance/retroceso de la chispa respecto al punto muerto superior. La constante de par, c_T, representa la capacidad máxima de par de un MCI para cierta masa de aire, velocidad del MCI, IAC= 1, y ICH= 1 [4]. La naturaleza cíclica de un MCI de cuatro tiempos se captura a través del uso del retraso de la admisión a la producción de par, Δt_{it}, y del retraso de la chispa a la producción de par, Δt_{st}[5].

El par debido a la fricción del MCI es obtenido de datos experimentales (Cho y Hedrick, 1989), es

$$T_f = 0{,}1056\omega_e + 15{,}10 \tag{13}$$

El par de accesorios, T_a puede ser agregado arbitrariamente para evaluar el rendimiento cuando el MCI es sometido a diferentes cargas de accesorios.

2.2. Motor eléctrico

La ME es una máquina asíncrona de tres fases, también conocida como máquina de inducción. El modo de operación está determinado por el signo del par mecánico de carga T_m, si es positivo, la ME funcionará como motor y si es negativo, la ME funcionará como generador. La parte eléctrica del motor está representada por un modelo de espacio de estados de cuarto orden, y la parte mecánica por uno de segundo orden. Todas las variables y parámetros están referidos al estator. Para indicar esto se usa un apóstrofe ($'$) en las ecuaciones del modelo. Todas las variables del estator y del rotor están dadas con respecto al marco de referencia arbitrario de dos ejes (marco dq). Los parámetros y subíndices se definen en la tabla 1.

Un circuito equivalente para la máquina de inducción usando el marco de referencia dq se muestra en las figuras 1(a) y 1(b). De estos dos circuitos se obtiene un modelo dinámico en términos de voltaje y flujo

$$\dot{\psi}_{qs} = -\frac{R_s}{L_s\sigma}\psi_{qs} + \frac{R_s L_m}{L_s L'_r}\psi'_{qr} - \omega\psi_{ds} + V_{qs} \tag{14a}$$

$$\dot{\psi}_{ds} = -\frac{R_s}{L_s\sigma}\psi_{ds} + \frac{R_s L_m}{L_s L'_r\sigma}\psi'_{dr} + \omega\psi_{qs} + V_{ds} \tag{14b}$$

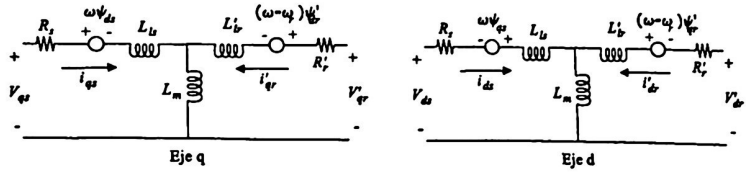
[4] Para el MCI de interés $c_T = 498636\text{Nm/(Kg/s)}$ (Cho y Hedrick, 1989).

[5] $\Delta t_{it} \approx 5{,}48/\omega_e$, $\Delta t_{st} \approx 1{,}30/\omega_e$

Cuadro 1. Parámetros y subíndices para el modelo del motor eléctrico

Parámetro	Definición
R	Resistencia
L	Inductancia
V	Voltaje
i	Corriente
ψ	Flujo
ω_m	Velocidad angular del rotor
θ_m	Posición angular del rotor
p	Número de pares de polos
ω_r	Velocidad eléctrica angular del rotor ($\omega_m \cdot p$)
θ_r	Posición eléctrica angular del rotor ($\theta_m \cdot p$)
T_e	Par electromagnético
T_m	Par de carga en la flecha
H	Constante combinada de inercia de la carga y del rotor

Subíndice	Significado
d	Variable en el eje d
q	Variable en el eje q
r	Variable del rotor
s	Variable del estator
l	Inductancia de dispersión
m	Inductancia de magnetización



(a) (b)

Figura 1. Circuitos equivalentes: a) Eje q, b) Eje d

$$\dot{\psi}'_{qr} = \frac{R'_r L_m}{L_s L'_r \sigma}\psi_{qs} - \frac{R'_r}{L'_r \sigma}\psi'_{qr} - (\omega - \omega_r)\psi'_{dr} + V'_{qr} \tag{14c}$$

$$\dot{\psi}'_{dr} = \frac{R'_r L_m}{L_s L'_r \sigma}\psi_{ds} - \frac{R'_r}{L'_r \sigma}\psi'_{dr} - (\omega - \omega_r)\psi'_{qr} + V'_{dr} \tag{14d}$$

con

$$\sigma = \left(1 - \frac{L_m^2}{L'_r L_s}\right)$$

Si se expresa el par en términos del flujo se obtiene

$$T_e = 1{,}5p\left(\frac{1}{L_s\sigma}\psi_{ds}\psi_{qs} - \frac{L_m}{L_s L'_r \sigma}\psi_{ds}\psi'_{qr} - -\frac{1}{L_s\sigma}\psi_{ds}\psi_{qs} + \frac{L_m}{L_s L'_r \sigma}\psi'_{dr}\psi_{qs}\right) \tag{15}$$

Las corrientes del estator y del rotor en términos de los flujos son

$$i_{qs} = \frac{1}{L_s\sigma}\psi_{qs} - \frac{L_m}{L'_r L_s \sigma}\psi'_{qr} \qquad i_{ds} = \frac{1}{L_s\sigma}\psi_{ds} - \frac{L_m}{L'_r L_s \sigma}\psi'_{dr} \tag{16a}$$

$$i'_{qr} = \frac{1}{L'_r\sigma}\psi'_{qr} - \frac{L_m}{L'_r L_s \sigma}\psi_{qs} \qquad i'_{dr} = \frac{1}{L'_r\sigma}\psi'_{dr} - \frac{L_m}{L'_r L_s \sigma}\psi_{ds} \tag{16b}$$

Para la parte mecánica de la máquina de inducción se tiene el siguiente modelo

$$\dot{\omega}_m = \frac{1}{2H}(T_e - F\omega_m - T_m) \tag{17}$$

$$\dot{\theta}_m = \omega_m \tag{18}$$

donde F es la fricción en la flecha del rotor.

2.3. Acoplamiento mecánico

La ecuación para la velocidad angular de la flecha de transmisión es

$$\dot{\omega}_v = \frac{1}{J}\left[R(k(t)) \cdot (\tau_{ME} \cdot \rho + \tau_{MCI}) - \tau_l - \tau_{fri} - \tau_{fre}\right] \tag{19}$$

donde ω_v es la velocidad en la flecha de transmisión, J es la inercia del vehículo[6], $R(k(t))$ es la relación de engranaje en la caja de velocidad, la cual depende del número de velocidad elegido $k(t)$, ρ es la relación del reductor usado con el motor eléctrico para ajustar las velocidades de la ME y del MCI, τ_{ME} es el par generado por la ME, τ_{MCI} es el par generado por el MCI, τ_{fric} es el par generado por la fricción, τ_l es el par de carga y τ_{fre} es el par de frenado, en este caso se considera el frenado como una fuente de par pero siempre negativa y acotada.

El par debido a la fricción está dado por

$$\tau_{fri} = \omega_v \cdot b \tag{20}$$

Al considerar el reductor de velocidad y la caja de velocidades, la velocidad angular del ME y del MCI también se ven afectadas de la siguiente manera

$$\omega_{MCI} = \omega_v \cdot R(k(t)) \tag{21a}$$

$$\omega_{ME} = \omega_v \cdot \rho R(k(t)) \tag{21b}$$

El par neto generado para la propulsión del vehículo τ_v, se ve afectado por la relación obtenida en los diferentes cambios de la caja de velocidad, de la siguiente manera

$$\tau_v = R(k(t)) \cdot (\tau_{mci} + \rho\tau_{ME}) \tag{22}$$

La velocidad lineal del vehículo es

$$v = \gamma \cdot \pi r \cdot \omega_v \tag{23}$$

con γ la relación final de engranaje del diferencial y r es el radio de la llanta.

[6] Dado que, comparadas con la inercia del vehículo, la inercia del MCI y del ME son despreciables, en la ecuación de velocidad sólo se considera la inercia del vehículo J.

2.4. Batería

Para las baterías se usa un modelo reducido que solamente considera el estado de carga. Se toman eficiencias fijas de carga y descarga, que incluyen el efectos de los convertidores CA-CD y CD-CA. Además se considera que el voltaje en terminales es fijo. Para el vehículo en cuestión se tomó una batería con las características descritas en la tabla 2.

Cuadro 2. Características del sistema de baterías

Capacidad	18 Ah
Número de módulos	20
Voltaje nominal	12.5 (volts por módulo)

La potencia eléctrica instantánea en la ME se calcula a partir de la corriente que entra o sale de las baterías. Para ello se utiliza el producto punto de componentes reales de la corriente y voltaje del estator, I_s y V_s, es decir

$$P_{elec} = I_s \cdot V_s \tag{24}$$

La corriente se determina al dividir esta potencia por el voltaje en las terminales de las baterías conectadas en serie[7]

$$I_{bat} = \frac{P_{elec}}{V_{bat}} \tag{25}$$

El estado de carga de las baterías (EDC), que representan la proporción de la máxima carga presente en las baterías está dado por

$$\dot{EDC} = \frac{\beta}{C} I_{bat} \tag{26}$$

donde $\beta = 1/\eta_d$ si $I_{bat} < 0$ y $\beta = \eta_c$ si $I_{bat} > 0$, con η_d y η_c las eficiencia de descarga y carga de las baterías, respectivamente, y C la máxima capacidad de carga de las baterías.

3. Control basado en reglas

La estrategia que se presenta a continuación para el control del flujo de potencia fue desarrollada con base en intuición ingenieril y el análisis de los mapas de eficiencia de cada componente (Lin *et al.*, 2003).

Control de división de potencia : Fig. 2(a), con base en el mapa de eficiencia del MCI , se elige un límite para la potencia a la cual el MCI puede

[7] De acuerdo con la Tabla 2, $V_{bat} = 250$V.

ser usado, P_{mci_on}, y un límite a partir del cual se tendrá potencia asistida, P_{p_a}. Estos valores se eligen de tal manera que se evite el funcionamiento del MCI en regiones de operación en que sea muy ineficiente (Lin *et al.*, 2003).

Control de frenado: Fig. 2(b), la estrategia de control de frenado se usa cuando la potencia demandada por el conductor es menor que cero, es decir, se desea frenar, $P_{dem} < 0$. Esta estrategia de frenado regenerativo es simple, pues se intenta capturar tanta energía del frenado como sea posible. En este modo de control hay una excepción para proteger a la batería de una sobrecarga, y se aplica cuando el EDC alcanza a un EDC máximo EDC_{max}, este valor se fija de tal manera que no se dañe la batería con una sobrecarga.

Control de recarga de baterías: Fig. 2(c), este modo del controlador entra en acción cuando el EDC de la batería pasa por abajo del límite inferior preestablecido, y pasa al modo de control de división de potencia cuando el EDC supera al límite superior preestablecido.

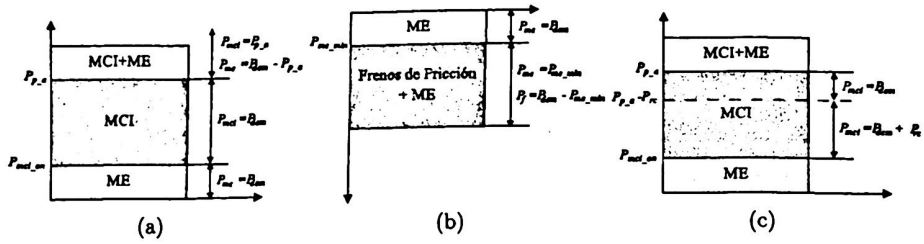


Figura 2. Modos de control de potencia. a) División de potencia, b) Frenado regenerativo, c) Recarga de baterías

4. Resultados

Los ciclos de manejo urbano y de carretera que se usaron para hacer las simulaciones fueron tomados de la Agencia de Protección Ambiental de Estados Unidos (U.S. Environmental Protection Agency) (Agency, n.d.). El ciclo de manejo urbano de la EPA (Urban Dynamometer Driving Schedule), UDDS por sus siglas en inglés, es llamado "la prueba de ciudad" y representa condiciones de manejo de ciudad (Agency, n.d.).

En la figura 3(a) se muestra el seguimiento de velocidad para el perfil UDDS con un EDC inicial de 0,53. El error de seguimiento se muestra en la figura 3(b). En la figura 3(c) se muestra el estado de carga de la batería (con un EDC inicial de 0,53), mientras que la figura 3(d) muestra la potencia entregada por el MCI y por la ME en los primeros segundos de simulación.

Como era de esperarse, con el uso del vehículo híbrido se tuvo un mayor ahorro de combustible. En la tabla 3 se muestra el consumo de combustible para cada configuración con el ciclo UDDS.

Los resultados son similares para el ciclo de manejo en carretera y no se muestran por economía de espacio.

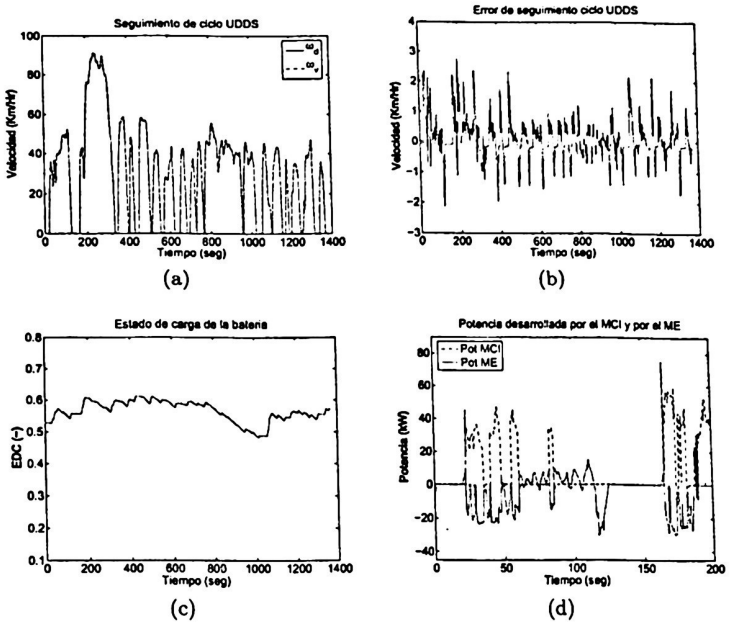


Figura 3. Resultados de simulación para el ciclo UDDS. a) Velocidades real y deseada, b) Error de seguimiento, c) Estado de carga de baterías, d) Potencia en MCI y ME

5. Conclusiones

En este trabajo se obtuvo un modelo dinámico para un sistema de propulsión híbrido cuyos subsistemas pueden ser fácilmente redimensionados o intercambiados para probar diferentes combinaciones o algoritmos de control.

Se propuso una estrategia basada en reglas para el control del flujo potencia básica, que dió muy buenos resultados para mantener al MCI en las regiones de operación más eficiente y el estado de carga de las baterías en niveles deseados. El seguimiento de los perfiles de velocidad impuestos por los ciclos de manejo estandarizados fue también muy bueno.

Como mejoras para hacer más útil el uso del modelo y del control se encuentran: validar el modelo y el controlador con un prototipo físico, hacer un análisis más detallado del dimensionamiento de los subsistemas y obtener un mejor modelo de del arreglo de baterías.

Referencias

Agency, U.S. Environmental Protection (n.d.). *http://www.epa.gov.*

Cuadro 3. Rendimiento

	Convencional	Hfrido
Consumo (lt)	1.301	1.043
Distancia (Km)	13.39	13.39
Rendimiento (Km/lt)	10.3	12.84

Cho, D. y J. K. Hedrick (1989). Automotive powertrain modeling for control. *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control* **Vol. 111**, 568–576.

Delprat, Sebastien, Jimmy Lauber, Thierry Marie Guerra y J. Rimaux (2004). Control af a parallel hybrid powertrain: optimal control. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **Vol. 53**(3), 872–881.

Ippolito, Lucio, Vicenzo Loia y Pierluigi Siano (2003). Extended fuzzy c-means and genetic algorithms to optimize power flow managment in hybrid electric vehicles. *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications* pp. 115–119.

Koo, Euh-Suh. Hyeoun-Dong Lee, Seung-Ki Sul y Joohn-Sheok Kim (1998). Torque control strategy for a parallel hybrid vehicle using fuzzy logic. *Industry Applications Conference* pp. 1715–1720.

Langari, Reza y Jong-Seob Won (2003). Integrated drive cycle analysis for fuzzy logic based energy management in hybrid vehicles. *The IEEE International Conference on Fuzzy Systems* pp. 290–295.

Lin, Chan-Chiao, Huei Peng, Jessy W. Grizzle y Jun-Mo Kang (2003). Power managment strategy for a parallel hybrid electric truck. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* pp. 839–849.

Paganelli, G., S. Delprat, T.M. Guerra, J. Rimaux y J.J Santin (2002). Equivalent consumption minimization strategy for parallel hybrid powertrains. *Vehicular Technology Conference* pp. 2079–2081.

Powell, B. K., K. E. Bailey y S. R. Cikanek (1998). Dynamic modeling and control of hybrid electric vehicle powertrain systems. *IEEE Control Systems* pp. 17–33.

Powell, B. K. y K. E. Bailey (1995). A hybrid electric vehicle powertrain dynamic model. *Proceedings of the American Control Conference, Seattle, Washington* pp. 1677–1682.

Schouten, Niels J., Mutasim A. Salman y Naim A. Kheir (2002). Fuzzy logic control for parallel hybrid vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **Vol. 10**, 460–468.

Sciarretta, Antonio, Michael Back y Lino Guzzella (2004). Optimal control of parallel hybrid electric vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* pp. 352–362.

Sebastien, Delprat, Guerra Thierry Marie, Paganelli Gino, LAuber Jimmy y Delhom Michel (2001). Control strategy optimization for an hybrid parallel powertrain. *Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA* pp. 1315–1320.

Evaluación Experimental de Controladores Tipo PID de Posición Aplicados a un Sistema de Suspensión Magnética *

Javier Ollervides, Alfredo Camarillo, Víctor Santibáñez y Alejandro Dzul

Instituto Tecnológico de la Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación,
Calz. Cuauhtémoc y Blvd. Revolución, Torreón, Coah., México
http://www.itlalaguna.edu.mx
{jollervi, vsantiba}@itlalaguna.edu.mx, {jacamarillo,
dzul}@faraday.itlalaguna.edu.mx

Resumen En este trabajo se presenta un estudio teórico y experimental de dos controladores tipo PID (**proporcional+integral+derivativo**) aplicados en un sistema de suspensión (o levitación) magnética. El primer esquema de posicionamiento abordado aquí es el controlador PID en modo fuerza, y el segundo es el controlador PID en modo velocidad. El principal ingrediente de aportación de este trabajo consiste en la evaluación de resultados experimentales en tiempo real, que satisfacen el comportamiento del modelo dinámico.

1. Introducción

El control lineal de posición de sistemas de levitación magnética (MagLev) es ampliamente abordado en la literatura, desde diversos puntos de vista. En este trabajo se estudian dos controladores de tipo PID de posición, detallando la descripción del método sistemático de ubicación de polos de lazo cerrado, para realizar la sintonización de ganancias de estos controladores, a partir de un modelo dinámico linealizado (bajo ciertas condiciones de operación) del sistema de suspensión magnética. La existencia de trabajos de investigación en la literatura, que abordan la problemática de control de sistemas MagLev (similares al abordado aquí), y que se utilizan como referencia en este trabajo son: [2], [6], [7], [8], [10] y [11].

2. Modelo dinámico del sistema MagLev

El MagLev puede ser visto como un sistema electromecánico, que se compone de un rotor traslacional sin fricción (esfera metálica), que se desplaza por debajo de un electromagneto sostenido por un pedestal, tal y como se muestra en la Figura 1.

* Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por CONACYT y DGEST.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 199-208

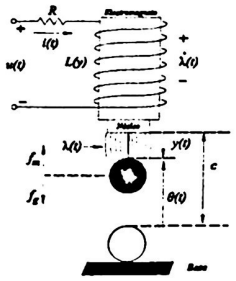


Figura 1. Sistema de suspensión o levitación magnética (MagLev).

Donde $u(t)$ [V] es la tensión de control , $i(t)$ [A] es la corriente, $\dot{\lambda}(t)$ [V] es la tensión inducida, $\lambda(t)$ [Wb] es el enlace de flujo del entrehierro, R [Ω] es la resistencia del alambrado, f_m [N] es la fuerza de atracción , $f_g = mg$ [N] es la fuerza debida a la gravedad de la tierra, m [kg] es la masa de la esfera, g $[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$ es la constante de gravedad, $y(t) = c - \theta(t)$ [m] es la posición de la esfera, y la constante c representa el entrehierro nominal, (véase la Figura 1). La inductancia del sistema se define en la referencia [5] como $L(y) = L_\infty + \frac{k}{y_o + y(t)}$ [H], donde L_∞ [H] es la inductancia propia del electromagneto cuando la esfera se coloca en el infinito, y_o [m] es un coeficiente de desplazamiento. Para modelar la dinámica del MagLev, se recurre a la definición de la coenergía acumulada W'_m, la cual es una función de las variables de estado $i(t)$ e $y(t)$ [1], y se expresa como $W'_m(i, y) = \frac{1}{2}L(y)i^2(t)$. La fuerza de atracción magnética producida por el electromagneto se define como $f_m = \frac{\partial W'_m(i,y)}{\partial y}$, desarrollando la expresión anterior, se tiene que,

$$f_m = -\frac{k}{2}\frac{i^2(t)}{[y_o + y(t)]^2} \tag{1}$$

donde k $\left[\frac{\text{Nm}^2}{\text{A}^2}\right]$ es la constante de fuerza del electromagneto.

La relación entre $\lambda(t)$ e $i(t)$ se define como $\lambda(t) = L(y)i(t)$ [1]. Para simplificar el modelo se formula la hipótesis:

$$L(y)\Big|_{y=y_*} = L_* = L_\infty + \frac{k}{y_o + y_*} \tag{2}$$

donde y_* [m] es la posición de equilibrio o de operación de la esfera. Aplicando ley de tensiones de Kirchhoff del circuito eléctrico, se tiene que $u(t) = Ri(t) + L_*\frac{di(t)}{dt}$. El movimiento o desplazamiento de la esfera móvil es modelado mediante la suma de fuerzas aplicadas al centroide de la esfera y recurriendo a la segunda ley de movimiento de Newton $m\ddot{y}(t) = f_m + f_g$ (ver Figura 1). Utilizando las expresiones anteriores el modelo no lineal en términos del vector de estado $\boldsymbol{x}(t) = [y(t) \quad i(t) \quad \dot{y}(t)]^T$ se expresa como:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ i(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \frac{1}{L_*}\left[u(t) - Ri(t)\right] \\ -\frac{k}{2m}\frac{i^2(t)}{[y_o+y(t)]^2} + g \end{bmatrix} \tag{3}$$

La ecuación (3) es un caso particular del modelo lagrangiano del MagLev presentado en [5]. Los parámetros en el punto de equilibrio son: $\dot{y}_* = 0\ [\frac{\text{m}}{\text{s}}]$, $L_* = L_\infty + \frac{k}{y_o+y_*}$ [H], $u_* = Ri_*$ [V] y $i_* = k_{ff}(y_o + y_*)$ [A]. Donde $k_{ff} = \sqrt{\frac{2mg}{k}}\left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right]$, es la constante de precompensación de corriente. El punto de equilibrio en malla abierta se expresa como $\boldsymbol{x}_* = [y_* \quad i_* \quad 0]^T$ con $u(t) = u_*$ [V] constante.

Aplicando una linealización aproximada del modelo no lineal expresado en la forma $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, u)$ en (3), utilizando la serie de *Taylor* truncada, evaluada en el punto de equilibrio $\boldsymbol{x}_*$, se obtiene un modelo lineal aproximado en la forma $\delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\delta\boldsymbol{x}(t) + B\delta u(t)$, que de forma explícita resulta ser:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta y(t) \\ \delta i(t) \\ \delta\dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-R}{L_*} & 0 \\ \frac{2g}{y_o+y_*} & \frac{-2g}{i_*} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta y(t) \\ \delta i(t) \\ \delta\dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_*} \\ 0 \end{bmatrix}\delta u(t) \tag{4}$$

A partir de la ecuación de estado (4), se obtiene la función de transferencia (FDT) en lazo abierto del MagLev (5), la cual es claramente inestable:

$$G_{LA}(s) = \frac{\delta Y(s)}{\delta U(s)} = \left[\frac{k_{cdc}}{\sigma_c s + 1}\right]\left[\frac{-k_{bdc}\omega_b^2}{s^2 - \omega_b^2}\right] \tag{5}$$

los parámetros del sistema linealizado son: $k_{cdc} = \frac{1}{R}\ [\frac{\text{A}}{\text{V}}]$, $\sigma_c = \frac{L_*}{R}$ [s] (parámetros de la dinámica eléctrica), y $k_{bdc} = \sqrt{\frac{k}{2mg}}\ [\frac{\text{m}}{\text{A}}]$, $\omega_b = \sqrt{\frac{2g(L_*-L_\infty)}{k}}\ [\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$ (parámetros de la dinámica electromecánica).

Los valores numéricos de los parámetros del sistema MagLev [9] son: $y_* = 7 \times 10^{-3}$ [m], $m = 0.068$ [kg], $g = 9.81\ [\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$, $R = 11\ [\Omega]$, $c = 0.014$ [m], $y_o = 2 \times 10^{-3}$[m], $k_{ff} = 142.9292\ [\frac{\text{A}}{\text{m}}]$, $L_\infty = 363$ [mH] y $k = 6.5308 \times 10^{-5}\ [\frac{\text{Nm}^2}{\text{A}^2}]$.

3. Objetivo de control

El objetivo de control es encontrar una señal $u(t)$ tal que $\lim_{t\to\infty} y_e(t) = 0$, donde $y_e(t) = y_d(t) - y(t)$ es el error de posición y $y_d(t)$ es la posición deseada de la esfera metálica.

4. Ley de control PID en modo fuerza

Este controlador está formado por dos controladores conectados en cascada, uno es de tipo PID de posición y el otro es de tipo PI de corriente, la estructura del controlador se muestra en la Figura 2. La ley de control se expresa como

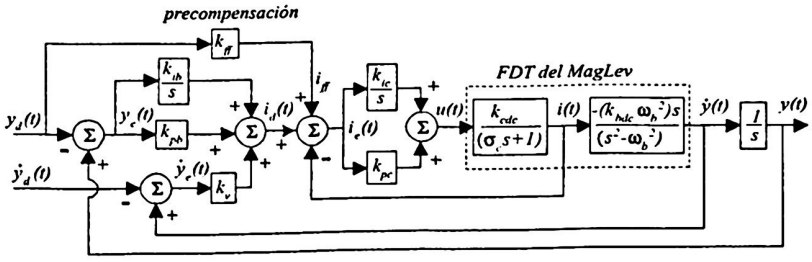


Figura 2. Sistema de control PID en modo fuerza.

$$u_v(t) = k_{pc} i_e(t) + k_{ic} \int i_e(t)dt \tag{6}$$

$$i_e(t) = u_c(t) - i(t) \tag{7}$$

$$u_c(t) = i_d(t) + k_{ff} y_d \tag{8}$$

$$i_d(t) = k_{pb} y_e(t) + k_{ib} \int y_e(t)dt + k_v \dot{y}_e(t) \tag{9}$$

donde $u_c(t)$ es la corriente calculada por la ley de control PID más el término de precompensación de fuerza expresado como $i_{ff} = k_{ff} y_d$, $i_d(t)$ es la corriente dinámica del posicionamiento deseado e $i_e(t)$ es el error de corriente del lazo de control interno PI. La variable $u_v(t) = u(t)$ representa la tensión de control que se aplica al sistema MagLev, mientras que k_{pb} y k_{pc} son las ganancias proporcionales de posición y de corriente respectivamente, k_{ib} y k_{ic} son las ganancias integrales de posición y corriente respectivamente, y k_v es la ganancia de velocidad.

4.1. Sintonización del controlador interno PI de corriente

La sintonización de las ganancias k_{pc} y k_{ic} se realiza de tal manera que la dinámica electromagnética se desacople del controlador del PID de posición. Para la sintonización de las ganancias se utiliza el método de colocación de los polos de la FDT [9].

La FDT del controlador PI se expresa como (ver la Figura 3 del lado izquierdo):

$$G_{C_{LC}}(s) = \frac{\delta I(s)}{\delta I_d(s)} = \frac{\frac{k_{ic}}{L_*}\left[\left(\frac{k_{pc}}{k_{ic}}\right)s + 1\right]}{s^2 + \left(\frac{R+k_{pc}}{L_*}\right)s + \left(\frac{k_{ic}}{L_*}\right)} \tag{10}$$

donde se puede identificar el siguiente polinomio característico:

$$P_c(s) = s^2 + \left(\frac{R + k_{pc}}{L_*}\right)s + \left(\frac{k_{ic}}{L_*}\right) \tag{11}$$

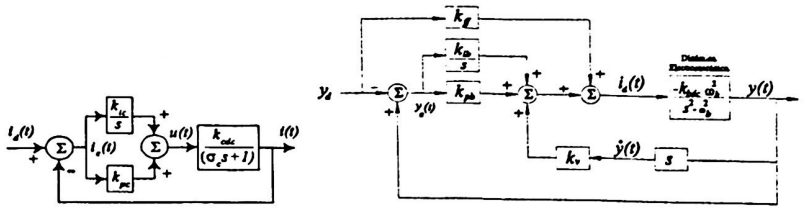


Figura 3. Controlador PI de corriente (izquierda), PID de posición (derecha).

que al comparalo con el polinomio característico deseado

$$Q_c(s) = s^2 + (-\alpha_{c1} - \alpha_{c2})s + \alpha_{c1}\alpha_{c2} = 0 \tag{12}$$

se obtiene el siguiente par de ecuaciones de sintonización:

$$k_{pc} = -(\alpha_{c1} + \alpha_{c2})L_* - R, \quad k_{ic} = \alpha_{c1}\alpha_{c2}L_* \tag{13}$$

Los valores obtenidos en la sintonización de ganancias son $k_{pc} = 100\ [\frac{\text{V}}{\text{A}}]$, $k_{ic} = 70\ [\frac{\text{V}}{\text{A}-\text{s}}]$. Es importante notar que se debe cumplir la condición $k_{pc} > k_{ic}$, con el propósito de evitar una respuesta con sobrepaso de la corriente del electromagneto.

4.2. Sintonización del controlador PID de posición

Considerando el desacoplamiento de los controladores conectados en cascada, la ley de control $u_c(t)$ (de tipo PID) se puede aplicar directamente a la dinámica electromecánica del MagLev, (ver la Figura 3 del lado derecho). La FDT de lazo cerrado se expresa como:

$$G_{M_{LC}}(s) = \frac{\delta Y(s)}{\delta Y_d(s)} = \frac{\left[\frac{2gk_{ib}}{i_*}\right]\left[\left(\frac{k_{pb}-k_{II}}{k_{ib}}\right)s+1\right]}{s^3 + \left(\frac{2gk_v}{i_*}\right)s^2 + \left(\frac{2gk_{pb}}{i_*} - \frac{2g}{y_o+y_*}\right)s + \left(\frac{2gk_{ib}}{i_*}\right)} \tag{14}$$

donde se identifica el siguiente polinomio característico de lazo cerrado:

$$P_b(s) = s^3 + \left(\frac{2gk_v}{i_*}\right)s^2 + \left(\frac{2gk_{pb}}{i_*} - \frac{2g}{y_o+y_*}\right)s + \left(\frac{2gk_{ib}}{i_*}\right) \tag{15}$$

que al compararlo con el siguiente polinomio característico deseado

$$\begin{aligned} Q_b(s) &= s^3 + (-\alpha_{b1} - \alpha_{b2} - \alpha_{b3})s^2 + \\ &(\alpha_{b1}\alpha_{b2} + \alpha_{b1}\alpha_{b3} + \alpha_{b2}\alpha_{b3})s - \alpha_{b1}\alpha_{b2}\alpha_{b3} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

se obtienen las siguientes ecuaciones de sintonización

$$\begin{aligned} k_{pb} &= \frac{i_*(\alpha_{b1}\alpha_{b2}+\alpha_{b1}\alpha_{b3}+\alpha_{b2}\alpha_{b3}+\frac{2g}{y_o+y_*})}{2g} \\ k_v &= -\frac{i_*(\alpha_{b1}+\alpha_{b2}+\alpha_{b3})}{2g} \\ k_{ib} &= -\frac{i_*(\alpha_{b1}\alpha_{b2}\alpha_{b3})}{2g} \end{aligned} \tag{17}$$

Los valores obtenidos en la sintonización de ganancias son $k_{pb} = 380\ \left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right]$, $k_{ib} = 750\ \left[\frac{\text{A}}{\text{s-m}}\right]$ y $k_v = 15\ \left[\frac{\text{A-s}}{\text{m}}\right]$. La FDT de este sistema de control presenta la siguiente agrupación de polos y ceros dominantes

$$\frac{\delta Y(s)}{\delta Y_d(s)} = \frac{k\omega_n^2\left(\frac{s}{\rho\omega_n}+1\right)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{18}$$

donde ω_n es la frecuencia natural no amortiguada, σ_d es la constante de tiempo y ζ es el factor de amortiguamiento del sistema [3]. El coeficiente $\rho = k_{ib}\left[(k_{ff}+k_{pb})\,\omega_n\right]^{-1}$ designa una razón que especifica la magnitud del cero con respecto a ω_n, que puede afectar visiblemente la velocidad de subida y el sobrepaso máximo de la respuesta dinámica de posición del MagLev [4].

4.3. Respuesta del sistema en modo fuerza

En la Figura 4 (izquierda) se muestran las gráficas de la respuesta experimental en tiempo real del controlador PID (caso regulación) aplicado al sistema MagLev, y la respuesta simulada en el programa Simulink de MatLab (utilizando el modelo no lineal del MagLev). La posición deseada es un escalón de 2 [mm] de amplitud, con $f = 0.2$ [Hz]. La condición inicial es: $\left[\ 0.0065[\text{m}] \quad i_*[\text{A}] \quad 0[\frac{\text{m}}{\text{s}}]\ \right]^T$. La frecuencia de muestreo para el cálculo numérico en tiempo real del controlador se asignó en $f_s = 1$ KHz. En la Figura 4 (derecha) se muestra la respuesta experimental del sistema de control PID en tiempo real (caso seguimiento), donde se observa que el objetivo de control se cumple en un intervalo de tiempo relativamente rápido. En la Figura 4 (en ambos casos) se observa que hay un sesgo apreciable entre la gráfica experimental y simulada de las variables $i(t)$ y $u(t)$ en régimen estacionario, lo cual se debe a la corriente de magnetización del núcleo ferromagnético del electromagneto, cuyo efecto no está agregado en el modelo no lineal del sistema MagLev.

5. Controlador PID en modo velocidad

En la Figura 5 se muestra la estructura del controlador PID en modo velocidad, esta ley de control agrega un controlador interno de velocidad tipo PI con prealimentación. Este tipo de estructura es uitlizada en el control de servomotores de cc, por lo que su aplicación en un sistema de suspensión magnética resulta interesante y es validada aquí mediante resultados experimentales. La ley de control definida en la Figura 5 se expresa como

$$u(t) = k_{pc}i_e(t) + k_{ic}\int i_e(t)dt \tag{19}$$

$$i_d(t) = k_v v_e(t) + k_{iv}\int v_e(t)dt + k_{ff}y_d(t) \tag{20}$$

$$v_d(t) = k_{pb}y_e(t) \tag{21}$$

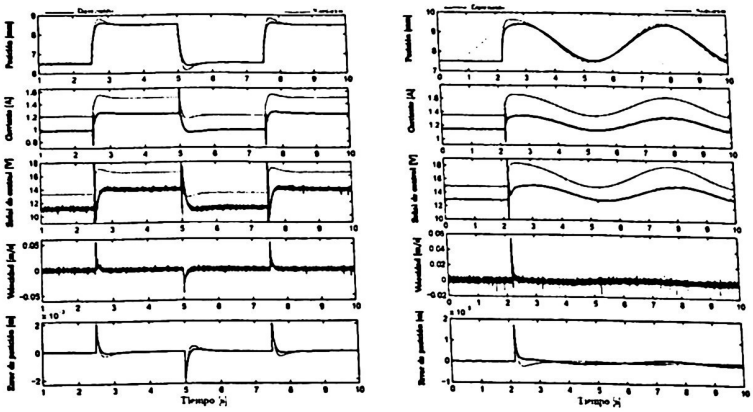


Figura 4. Respuesta del sistema, caso regulación (izquierda), caso seguimiento (derecha).

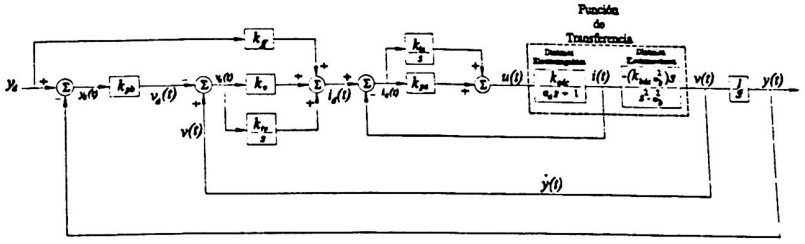


Figura 5. Controlador PID en modo velocidad.

donde $v_e(t) = v(t) - v_d(t)$ es el error de velocidad, $v(t) = \dot{y}(t)$ es la velocidad de la esfera, k_v es la ganancia proporcional de velocidad, k_{ib} es la ganancia integral de velocidad y k_{pb} la ganancia proporcional de posición. La ley de control PID en modo velocidad se puede reescribir al sustituir el error de velocidad $v_e(t)$, junto con $v_d(t)$ en la ecuación (19) y con algunas manipulaciones algebraicas, obteniéndose la siguiente expresión

$$i_d(t) = -k_p y_e(t) - k_i \int y_e(t)dt + k_v \dot{y}(t) + k_{ff} y_d(t) \tag{22}$$

donde $k_p = k_v k_{pb} + k_{iv}$, $k_i = k_{iv} k_{pb}$ y k_v son las ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente del controlador PID. En esta sección ya no se detalla la sintonización de las ganancias del lazo de control interno PI de corriente ya que resulta ser la misma que la del controlador PID en modo fuerza.

5.1. Sintonización del controlador interno PI de velocidad

La sintonización de este controlador se realizó utilizando la técnica de colocación de polos con controlador mostrado en la Figura 6 (izquierda).

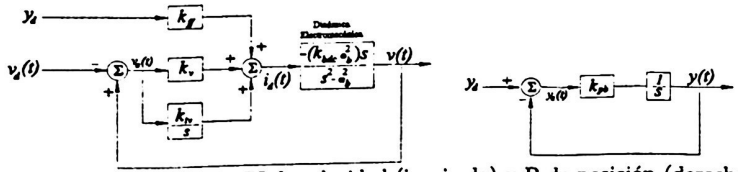


Figura 6. Controlador PI de velocidad (izquierda) y P de posición (derecha)

La ley de control PI se suma con el término $i_{ff} = k_{ff} y_d(t)$ de precompensación de corriente o fuerza y se aplica a la dinámica electromecánica. La FDT del sistema de control PI de velocidad se expresa como

$$G_{V_{LC}}(s) = \frac{\delta V(s)}{\delta V_d(s)} = \frac{\frac{2g(k_{ib}-k_{ff})}{i_*}\left[\left(\frac{k_v}{k_{ib}-k_{ff}}\right)s+1\right]}{s^2 + k_v\frac{2g}{i_*}s + \left(\frac{k_{ib}}{i_*} - \frac{1}{y_0+y_*}\right)2g} \tag{23}$$

donde se puede identificar el siguiente polinomio característico de lazo cerrado de segundo orden:

$$P_v(s) = s^2 + k_v\frac{2g}{i_*}s + \left(\frac{k_{ib}}{i_*} - \frac{1}{y_0+y_*}\right)2g \tag{24}$$

el polinomio característico deseado se expresa como:

$$Q_v(s) = s^2 + (-\alpha_{v1} - \alpha_{v2})s + \alpha_{v1}\alpha_{v2} \tag{25}$$

haciendo una analogía entre (25) y (24) se tienen las siguientes ganancias de sintonización

$$k_v = (-\alpha_{v1} - \alpha_{v2})\frac{i_*}{2g} \tag{26}$$

$$k_{ib} = i_*\left[\frac{\alpha_{v1}\alpha_{v2}}{2g} + \frac{1}{y_0+y_*}\right] \tag{27}$$

Las valores resultantes de la sintonización de ganancias son : $k_{pb} = 20\ [\frac{1}{s}]$, $k_v = 10\ [\frac{A-s}{m}]$, $k_{ib} = 500\ [\frac{A}{m}]$, $k_{pc} = 500\ [\frac{V}{A}]$, $k_{ic} = 70\ [\frac{V}{A-s}]$. El valor de la ganancia k_{pb} se obtiene de la FDT del controlador de posición (desacoplado) $\frac{Y(s)}{Y_d(s)} = \frac{1}{\tau_b s+1}$, tal y como se muestra en la Figura 6 (derecha), $k_{pb} = \frac{1}{\tau_b}$, τ_b es la constante de tiempo de posición.

5.2. Respuesta del sistema en modo velocidad

En la Figura 7 (izquierda) se muestran las gráficas de la respuesta experimental en tiempo real del sistema de control PID (caso de regulación), en donde se observa que la posición de la esfera presenta un comportamiento dinámico de primer orden. Se observa que la posición de la esfera alcanza a la posición deseada en un tiempo relativamente rápido y se puede apreciar que el error en régimen estacionario tiende a cero, cumpliéndose así el objetivo de control.

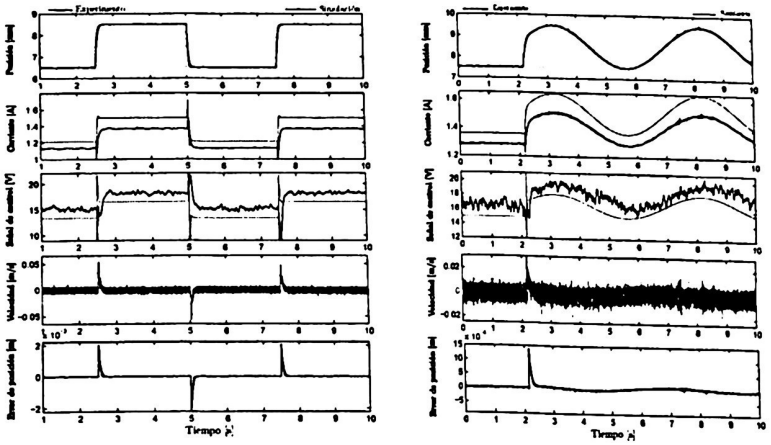


Figura 7. Respuesta del sistema, caso regulación (izquierda), caso seguimiento (derecha).

Mientras que en la Figura 7 (derecha) se muestran las graficas de la respuesta en tiempo real del sistema para el caso seguimiento, donde se observa claramente que el sistema de control PID en modo velocidad cumple con el objetivo de control de forma satisfactoria.

6. Conclusiones

La validación experimental de los dos controladores tipo PID aplicados en el sistema MagLev, demuestra que la respuesta de posición del sistema es satisfactoria, ya que el error de posición cumple el objetivo de control (ver la Figura 8). Los resultados de simulación obtenidos a partir del modelo dinámico son razonablemente parecidos a la respuesta experimental del sistema. Si las respuestas de los errores de posición de ambos controladores son comparadas (ver la Figura 8), es evidente que el controlador PID en modo velocidad no presenta sobrepaso y su dinámica es más rápida, por lo que puede ser considerado como el controlador de mejor desempeño, en comparación con el controlador PID en modo fuerza.

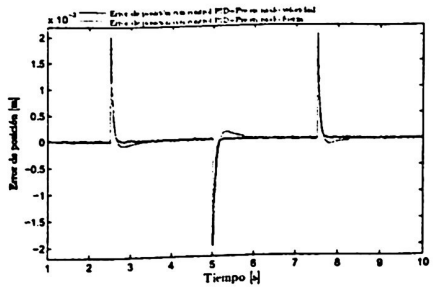


Figura 8. Errores de posición, caso regulación.

Referencias

1. A. E. Fitzgerald, Ch. Kingsley Jr. & A. Kusko, *Electric Machinery.* Third Edition. The Processes, Devices, and Systems of Electromechanical Energy Conversion, pp. 2-5, pp. 8-11, pp. 86-95 1971.
2. W. Hurley, W. Wölfle, (1997). *Electromagnetic Design of Magnetic Suspension System.* IEEE Transactions on Education, Vol. 40, No. 2, pp. 124-130, May 1997.
3. B. C. Kuo, (1994). *Automatic Control Systems.* Prentice Hall, 1994.
4. P. H. Lewis, Chang Yang, (1999). *Basic Control Systems Engineering.* Prentice Hall, 1997.
5. R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland & B. Maschke , (2000). *Dissipative systems analysis and control.* Springer-Verlag London, 2000.
6. J. Ollervides, A. Ruelas, V. Santibáñez & A. Sandoval, (2005). *Evaluación Experimental de Controladores Lineales y No Lineales en el Sistema de Levitación Magnética MagLev.* Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, Cuernavaca, Morelos México, Oct. 2005.
7. J. Ollervides, V. Santibáñez, (2006). *Control Borroso de un Sistema de Suspensión Magnética.* Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, UNAM, México D.F , Oct. 2006.
8. R. Ortega., A.J. van der Schaft, I. Mareels & B. Maschke, (2001). *Putting Energy Back in Control.* IEEE Control Systems Magazine, Vol. 21 pp. 18-33 Abril 2001.
9. Quanser Consulting Magnetic Levitation (MagLev), (2003). *Instructor Manual, Specialty Experiment: PIV-plus-Feedfoward Control.* Quanser Innovate Educate, 2003.
10. H. Rodríguez, R. Ortega, & H. Siguerdidjane *Experimental comparison of Linear and Nonlinear Controllers for a Magnetic Suspension.* Anchorage, Alaska, USA, Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications, September pp. 25-27, 2000.
11. Y. S. Shiao *Design and Implementation of a Controller for a Magnetic Levitation System.* Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(D), Vol. 11, No. 2, pp. 88-94, 2001.

Sistemas de Potencia I

El Efecto de la Resistencia Serie Equivalente de los Capacitores en los Convertidores Cuadráticos

Luis Humberto Díaz-Saldierna, Jesús Leyva-Ramos, Ma. Guadalupe Ortiz-López
y Juan Manuel García-Ibarra
Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica,
Camino a la Presa San José # 2055, San Luis Potosí, S.L.P., 78216 México
{ldiaz, jleyva, gortiz, jmgi}@ipicyt.edu.mx

Resumen. Los convertidores cuadráticos son una alternativa interesante para la construcción de reguladores de CD-CD con una amplia relación de conversión de voltaje. Estos convertidores se construyen con dos filtros LC; y por lo tanto, presentan una dinámica de cuarto orden. En este trabajo se presentan modelos para el convertidor cuadrático elevador incluyendo el efecto de la resistencia serie equivalente de los capacitores. A partir de un estudio en respuesta en frecuencia, para el modelo promediado lineal, se muestra que al incluirse este efecto se modifica la respuesta del convertidor al amortiguarse sus picos de resonancia. Por otra parte, la mayoría de las fallas en las fuentes conmutadas se presenta en los capacitores, esto motiva su estudio. Se presentan resultados experimentales para un convertidor elevador cuadrático utilizando un analizador de respuesta en frecuencia.

Palabras Clave: Convertidores conmutados, convertidores cuadráticos, modelado promediado, resistencia serie equivalente.

1 Introducción

El desarrollo de nuevas tecnologías requiere de fuentes de CD-CD con amplios rangos en la relación de conversión de voltaje; por ejemplo, en equipos portátiles y arreglos fotovoltaicos [1]. El desarrollo de equipos de comunicación portátil se ha acelerado por la demanda de los usuarios de nuevos dispositivos que los hacen más versátiles, pero que incrementan la demanda de energía de la batería [2]. Por otro lado, las celdas de combustible pueden ser una alternativa viable en la generación de energía eléctrica, la cual se produce de manera ecológica y eficiente, pero presentan la desventaja de una alta variación y bajo valor del voltaje de salida [3].

En teoría, un amplio rango de conversión de voltaje puede obtenerse ajustando la modulación de la señal de control del convertidor de CD-CD. En la práctica, el rango de conversión de los convertidores convencionales es limitado debido principalmente a las características de los dispositivos de conmutación. Por otro lado, se pueden usar transformadores para elevar el voltaje; sin embargo, se pueden presentar problemas de saturación, ancho de banda del transformador e interferencia electromagnética.

Una configuración que provee un amplio rango en la relación de conversión de voltaje es el convertidor elevador de dos etapas, el cual está construido por dos

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 211-220

convertidores de CD-CD básicos conectados en cascada con el correspondiente incremento de las pérdidas de potencia [4]. En el convertidor elevador de dos etapas, el rango de conversión está dado por una función cuadrática del ciclo de trabajo.

En la literatura técnica es posible encontrar varios trabajos acerca de convertidores elevadores de dos etapas con un solo interruptor activo [5], pero solo algunas tratan el tema del modelado para este tipo de convertidores [6], [7], [8], en los cuales no se consideró el efecto de la resistencia serie equivalente (ESR por sus siglas en inglés) de los capacitores, el cual tiene una gran influencia en la dinámica del convertidor. En el presente trabajo se muestran los modelos para el convertidor elevador de dos etapas incluyendo el efecto ESR de los capacitores. Estos modelos pueden obtenerse por medio de técnicas de modelado promedio del interruptor PWM; sin embargo, en este trabajo los modelos se obtienen por medio de una representación en espacio de estados en la cual se incluye la ESR de los capacitores del convertidor.

La ESR representa todas las pérdidas ohmicas de un capacitor y está dada por la relación $ESR = R_A + 1/\omega^2 R_P C^2$ en donde R_A representa a la resistencia debida al alambre usado en las terminales de conexión y queda determinada por el tipo y tamaño de las mismas. La resistencia R_P modela a la resistencia equivalente paralela y representa la oposición que presenta el capacitor a la corriente de fuga. El valor de la ESR aumenta con el tiempo y disminuye al aumentar la capacitancia, la temperatura y el rango de voltaje de trabajo. El valor típico de la ESR va desde 2 mΩ, para capacitores de alto valor con terminales de tornillo, hasta 10 Ω para capacitores miniatura. Los fabricantes proveen dicho valor a una temperatura de 25°C y una frecuencia de operación de 120 Hz.

El capacitor puede representarse por un modelo simplificado donde la ESR aparece como una resistencia en serie, denominada R_C, según se muestra en la Figura 1. Este modelo representa al capacitor como un circuito RC y pareciera muy sencillo; sin embargo, al momento de operar los convertidores conmutados aparecen fenómenos interesantes.

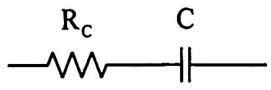


Fig. 1. Modelo simplificado de un capacitor.

Cuando el convertidor conmutado está operando, una onda cuadrada de corriente es aplicada al capacitor, resultando con esto un deterioro del mismo y por lo tanto un daño en la fuente de poder conmutada. Según datos estadísticos [9], el 60% de las fallas en las fuentes conmutadas se presenta en los capacitores, dicha falla se relaciona directamente con la ESR del capacitor. Aunado a lo anterior, el cambio de valor en la ESR del capacitor provocará un cambio en la dinámica del convertidor llegando a causar inestabilidad en el sistema de lazo cerrado de la fuente conmutada [10].

2 Modelado de un convertidor cuadrático elevador con un solo interruptor activo

El convertidor cuadrático elevador con un solo interruptor activo se muestra en la Figura 2 donde E es el voltaje de entrada, V_0 es el voltaje de salida y U el ciclo de trabajo nominal. Éste convertidor está construido con dos filtros LC, un interruptor activo (MOSFET) y tres interruptores pasivos (diodos), y utiliza un solo circuito de control a diferencia de dos circuitos de control requeridos cuando dos convertidores elevadores básicos son conectados en cascada. En el convertidor cuadrático elevador, la ganancia de voltaje en corriente directa es una función cuadrática del ciclo de trabajo nominal U y está dada por $V_0 = E/(1-U)^2$.

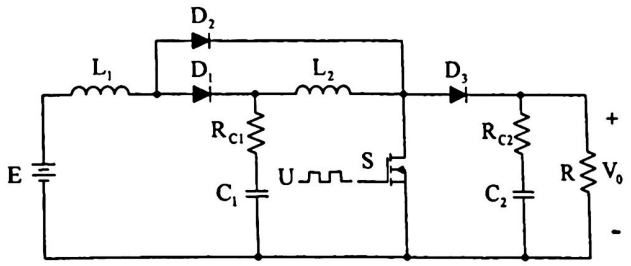


Fig. 2. Convertidor cuadrático elevador con un solo interruptor activo.

Las condiciones de operación en estado estable en conducción continua pueden obtenerse a través del circuito del convertidor usando las condiciones de encendido y apagado del MOSFET y los diodos [11]. El modo de conducción continua implica que el pico del rizo de corriente del inductor es más pequeño que la componente de CD de la corriente en el inductor; y por lo tanto, se garantiza que la corriente del inductor siempre circule en el mismo sentido. Despreciando todas las pérdidas, las condiciones de operación en estado estable son:

$$V_{C1} = \frac{E}{1-U}, \qquad V_{C2} = \frac{E}{(1-U)^2}$$
$$i_{L1} = \frac{E}{(1-U)^2 R}, \qquad i_{L2} = \frac{E}{(1-U)^3 R} \tag{1}$$

Por otro lado, si el efecto de la ESR es considerado la expresión (1) cambiaría a:

$$V_{C1} = \frac{E}{1-U}\left[1 - \frac{UR_{C1}}{R(1-U)^2 J}\right], \quad V_{C2} = \frac{E}{(1-U)J}$$
$$i_{L1} = \frac{I_o}{(1-U)^2}, \quad i_{L2} = \frac{I_o}{(1-U)} \tag{2}$$

donde R_{C1} contiene el efecto de la ESR asociado al capacitor uno y R_{C2} contiene el efecto de la ESR asociado al capacitor dos, y $J = \frac{UR_{C1}}{R(1-U)^3} + \frac{R_{C2} + R(1-U)}{R_{C2} + R}$.

Los rizos de corriente de los inductores y rizos de voltaje en los capacitores están dados por:

$$\Delta V_{C1} = \frac{UE}{R(1-U)^2 C_1 f_S J}, \quad \Delta V_{C2} = \frac{UE}{(R+R_{C2})(1-U)C_2 f_S J}$$
$$\Delta i_{L1} = \frac{UE}{L_1 f_S}, \quad \Delta i_{L2} = \frac{UE}{(1-U)L_2 f_S}\left[1 - \frac{UR_{C1}}{R(1-U)^2 J}\right] \tag{3}$$

donde f_S es la frecuencia de conmutación del convertidor.

Usando herramientas de teoría de circuitos se obtienen las trayectorias eléctricas que se forman cuando el interruptor activo (MOSFET) está encendido o apagado. El modelo conmutado lineal para el convertidor cuadrático elevador obtenido se presenta en la ecuación (4), donde $e \in R$ es el voltaje de entrada, los estados son las corrientes en los inductores y los voltajes de los capacitores, y q es una función de conmutación con valores [0, 1]. El valor de q es 1 cuando el interruptor activo se encuentra encendido y 0 cuando el interruptor activo está apagado.

En muchos circuitos de electrónica de potencia es más importante saber los valores promedios de los voltajes y las corrientes que los valores instantáneos de los mismos [12]; y por lo tanto, el promedio de la función de conmutación q es obtenido. Para los convertidores de CD-CD en modo conmutado, el valor promedio de la función de conmutación q es u (ciclo de trabajo del convertidor). El modelo promediado se muestra en (5), siendo un modelo de tipo no lineal debido a que la matriz y los vectores de entrada dependen de $u \in R$.

Modelo conmutado lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(1-q)R_{C_1}}{L_1} & \frac{(1-q)R_{C_1}}{L_1} & -\frac{(1-q)}{L_1} & 0 \\ \frac{(1-q)R_{C_1}}{L_2} & -\frac{R_{C1}(R+R_{C_2})+(1-q)R_{C_2}R}{L_2(R+R_{C_2})} & \frac{1}{L_2} & -\frac{(1-q)R}{L_2(R+R_{C_2})} \\ \frac{(1-q)}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-q)R}{C_2(R+R_{C_2})} & 0 & -\frac{1}{C_2(R+R_{C_2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e \quad (4)$$

Modelo promediado no lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(1-u)R_{C_1}}{L_1} & \frac{(1-u)R_{C_1}}{L_1} & -\frac{(1-u)}{L_1} & 0 \\ \frac{(1-u)R_{C_1}}{L_2} & -\frac{R_{C1}(R+R_{C_1})+(1-u)R_{C_1}R}{L_2(R+R_{C_1})} & \frac{1}{L_2} & -\frac{(1-u)R}{L_2(R+R_{C_1})} \\ \frac{(1-u)}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-u)R}{C_2(R+R_{C_1})} & 0 & -\frac{1}{C_2(R+R_{C_1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e \quad (5)$$

El uso del modelo linealizado es una estrategia muy común para convertidores de CD-CD. Dichos modelos pueden ser obtenidos fácilmente desde (5). El proceso de linealización describe el comportamiento del convertidor a una pequeña perturbación alrededor de un punto de operación. A partir del modelo promediado lineal sin ESR y con ESR es posible obtener las funciones de transferencia con respecto al ciclo de trabajo de las corrientes de los inductores y los voltajes de los capacitores y así comparar su respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia.

3 Resultados experimentales

Un prototipo de un convertidor cuadrático elevador fue construido en el Laboratorio de Electrónica de Potencia y Sistemas de Control del IPICYT. El convertidor fue diseñado para tener una relación de conversión de 9 V a 48 V con un ciclo de trabajo de 0.58, una corriente promedio para el primer inductor de 6.73 A y para el segundo de 2.44 A, una resistencia de carga de 53 Ω, una corriente de salida de 0.905 A y una potencia máxima de 43 W. Los parámetros de diseño se muestran en la Tabla 1. Los valores ESR de los capacitores fueron medidos utilizando un puente de impedancias de la compañía GW Instek, modelo LCR821.

Inicialmente se estudia la función de transferencia de la corriente del primer inductor a la señal de control. Cuando la ESR del capacitor no se considera, los polos de esta función están localizados en {-323.7 ± j1898.6, -32.3 ± j6613} y sus ceros en {-697, -334 ± j7221}. Mientras que cuando se considera la ESR de los capacitores, la localización será ahora en {-678 ± j1867, -1365 ± j6438} y sus ceros en {-660, -1495

± j6778}. En la Figura 3 se muestra la respuesta en frecuencia de dicha función de transferencia, así como el diagrama correspondiente de polos y ceros. Se muestra que la ESR añade amortiguamiento a los picos de resonancia por lo que se simplifica el diseño del controlador. Además se encuentra que aún cuando ambas funciones de transferencia son de fase mínima, al considerar el efecto de la ESR, los polos se mueven más a la izquierda del eje imaginario.

Tabla 1. Parámetros del convertidor

Capacitor C_1	114 μF
Capacitor C_2	44 μF
Inductor L_1	94 μH
Inductor L_2	411 μH
Resistencia de carga R	53 Ω
ESR C_1	495 mΩ
ESR C_2	250 mΩ
Diodos D_1, D_2 y D_3	MUR1560
Interruptor S_1	IRF740

Posteriormente se estudio la función de transferencia voltaje de salida a la señal de control. Los polos de las funciones de transferencia con y sin ESR son los mismos que los de las funciones de transferencia antes citadas. Sin embargo, los ceros están localizados en el caso del modelo sin ESR en {21604, 568 ± j5843}, mientras que para el modelo considerando la ESR se localizan en {20362, -1170 ± j5896}. Es interesante observar que sin considerar el efecto de la ESR del capacitor la función de transferencia tiene todos sus ceros localizados en el lado derecho del plano-s, mientras que al considerar la ESR dos ceros se mueven a la izquierda del plano-s.

La Figura 4 presenta la respuesta en frecuencia y la localización de polos y ceros en el plano-s para la función de transferencia voltaje de salida a señal de control del convertidor prototipo. Al igual que en el caso anterior, por efecto de la ESR de los capacitores existe un amortiguamiento significativo en los picos de resonancia. En este caso, la función de transferencia corresponde a una función de fase no mínima, es decir, tiene ceros en el lado derecho del plano-s, los cuales dificultan el diseño del controlador al cerrarse el lazo de retroalimentación.

Es interesante observar, que al considerar el efecto de la ESR de los capacitores, dos de los ceros que según el modelo sin ESR se encuentran en el lado derecho del plano-s, en realidad están localizados en el lado izquierdo del mismo. Por lo tanto, la función presenta un mejor comportamiento dinámico al esperado y existe una mayor flexibilidad al usar la corriente del primer inductor para el diseño del lazo de control.

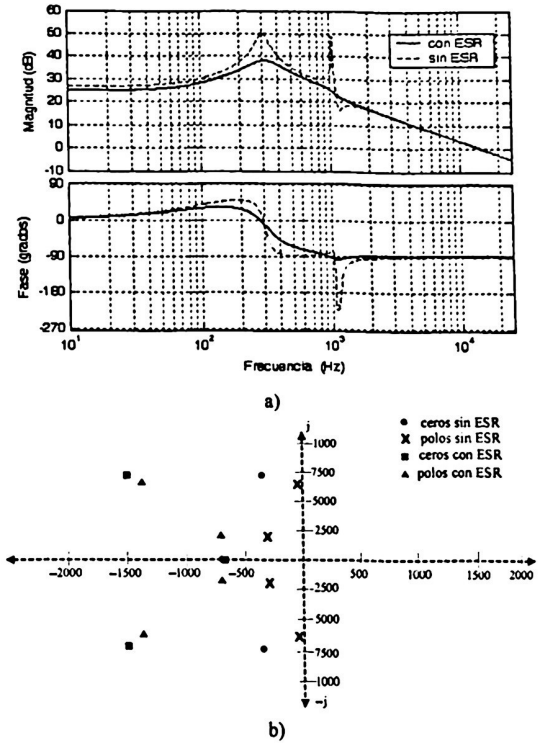


Fig. 3. Función de transferencia del primer inductor a la señal de control: a) Diagrama de Bode, y b) ubicación de polos y ceros en el plano-s.

La Figura 5 muestra el diagrama de conexiones utilizado para obtener experimentalmente las respuestas en frecuencia de las funciones de transferencia corriente primer inductor a señal de control y voltaje de salida a señal de control.

La Figura 6 muestra la respuesta en frecuencia experimental para las funciones de transferencia corriente primer inductor a señal de control y voltaje salida a señal de control, las cuales se obtienen a través del analizador de respuesta en frecuencia modelo 300 de la compañía AP Instruments. En dichas gráficas se muestran también las respuestas en frecuencia teóricas las cuales incluyen la correspondiente ganancia del modulador $1/V_p$. A partir de estas gráficas es posible observar el efecto de la ESR de los capacitores amortiguando los picos de resonancia, principalmente en los polos localizados a baja frecuencia.

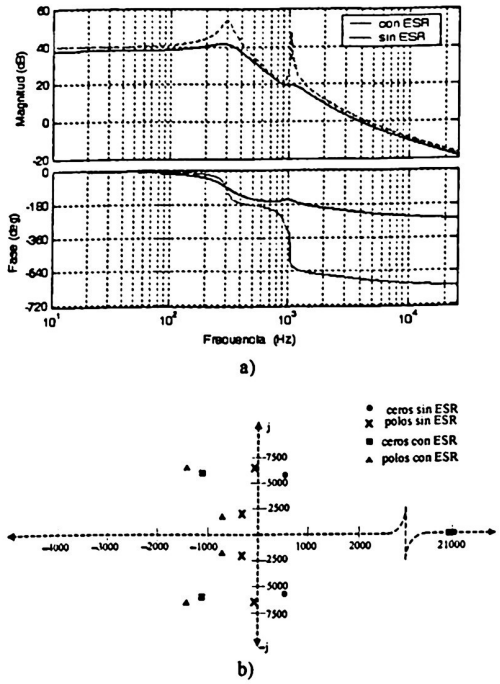


Fig. 4. Función de transferencia voltaje de salida a señal de control: a) Diagrama de Bode, y b) ubicación de polos y ceros en el plano-s.

La gráfica corriente primer inductor a señal de control muestra un comportamiento de un cero a baja frecuencia y una caída de 20 dB/dec en alta frecuencia. La gráfica voltaje salida a señal de control presenta un comportamiento de un cero a baja frecuencia ubicado en el lado izquierdo del plano-s y una caída de 20 dB/dec en alta frecuencia.

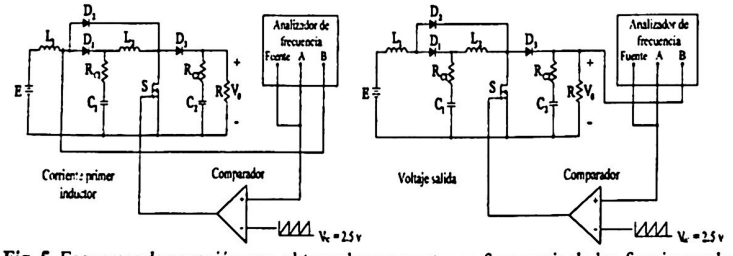


Fig. 5. Esquemas de conexión para obtener las respuestas en frecuencia de las funciones de transferencia.

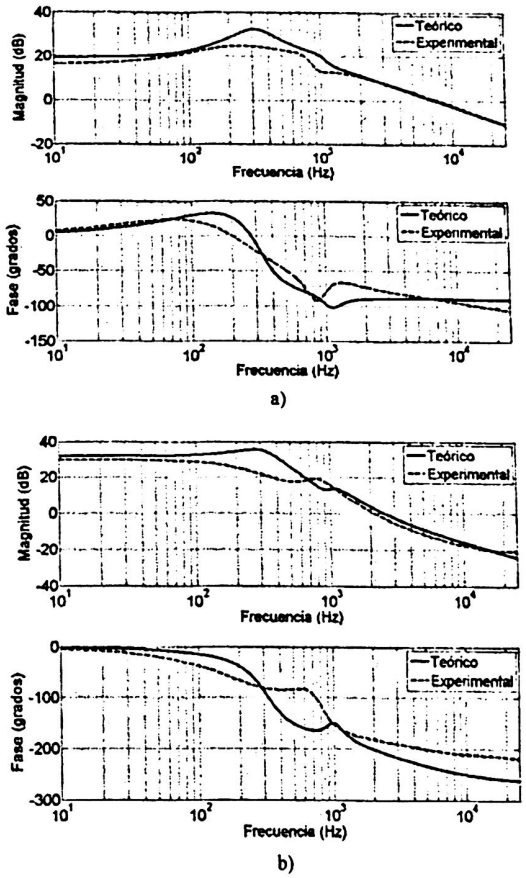


Fig. 6. Gráfica experimental de ganancia y fase: a) Función de transferencia corriente primer inductor a señal de control, y b) voltaje salida a señal de control.

4 Comentarios finales

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que la respuesta en frecuencia del convertidor cuadrático elevador, que corresponde a la de un sistema de cuarto orden, por efecto de la ESR de los capacitores se modifica de manera significativa al atenuarse los picos de resonancia. Además, las funciones de transferencia corriente

primer inductor a señal de control y voltaje salida a señal de control, cuyas señales se utilizan generalmente al diseñarse controladores, presentan un mejor comportamiento dinámico al indicado por el modelo que no considera el efecto de la ESR. En especial se observa que en la función de transferencia voltaje de salida a señal de control, algunos de los ceros que parecen estar localizados en el lado derecho del plano-s están en realidad localizados en el lado izquierdo del mismo, por lo que en la práctica se facilita el diseño del esquema de control para el convertidor.

Referencias

1. P. C. Senia and G. R. Walker. *Cascade DC-DC Converter Connection of Photovoltaic Modules.* IEEE Trans. Power Electron., 19-4, pp. 1130-1139 (2004).
2. E. Wells and M. Jordan. *Low Power Boost Converter for Portable Applications*, Unitrode Seminar 1200, Topic 2 (2001).
3. G. Hooges. *Fuel Cell Technology Handbook*, CRC Press (2002).
4. J. A. Morales-Saldaña, E. E. Carbajal-Gutiérrez and J. Leyva-Ramos. *Modeling of Switch-Mode DC-DC Cascade Converters.* IEEE Trans. Aeros. Electron. Syst., 38-1, pp. 295-299 (2002).
5. F. L. Luo and H. Ye. *Positive Output Cascade Boost Converter.* IEE Electr. Power Appl., 151-5, pp. 590-606 (2004).
6. M. Veerachary. *Signal flow graph model of multi-state boost DC-DC converters.* IEE Electr. Power Appl., 151-5, pp. 583-589 (2004).
7. E. E. Carbajal-Gutiérrez, J. A. Morales-Saldaña and J. Leyva-Ramos. *Modeling of a Single-Switch Quadratic Buck Converter.* IEEE Trans. Aeros. Electron. Syst., 41-4, pp.1451-1457 (2005).
8. J. A. Morales-Saldaña, E. E. Carbajal-Gutierrez, J. Leyva-Ramos and M. G. Ortiz-Lopez. *Multiloop Controller Design for a Quadratic Boost Converter.* IET Electr. Power Appl., 1-3, pp.362-367 (2007).
9. Military Handbook 271 F Notice 2. *Reliability Prediction of Electronic Equipment.* (1995).
10. P. T. Krein. *Elements of Power Electronics.* First Edn., Oxford University Press (1998).
11. R. W. Erickson and D. Maksimovic. *Fundamentals of Power Electronics.* Second Edn., Kluwer Academic Publishers, Boston, USA (2001).
12. J. G. Kassakian, M. F. Schlecht and G. C. Verghese. *Principles of Power Electronics.* Addison-Wesley Publishing Company (1991).
13. R. B. Ridley, B. H. Cho and F. C. Lee. *Analysis and Interpretation of Loop Gains of Multiloop-Controlled Switching Regulators.* IEEE Trans. Power Electron., 3-4, pp. 489-498 (1998).

Modelo para la potencia de una turbina eólica*

Juvenal Villanueva Maldonado** y Luis Alvarez-Icaza ***

Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacán DF, México

Resumen Se proponen dos modelos para la potencia mecánica producida por una turbina eólica. Los dos modelos de potencia están basados en la velocidad relativa entre el viento y las hélices. Estos son comparados con un modelo de potencia heurístico de referencia usado en la literatura.

Palabras clave: Turbina eólica, potencia mecánica, velocidad relativa y fricción.

1. Introducción

Las energías renovables juegan en la actualidad un papel muy importante en la búsqueda de formas diferentes para generar energía eléctrica. El uso de turbinas eólicas para extraer la energía cinética que está contenida en las corrientes de aire es una de las fuentes renovables con mayor crecimiento en el mundo. Se desea que estas turbinas maximicen la energía extraida, siempre y cuando se pueda mantener condiciones seguras de operación. Para esto, el control tiene un papel muy importante en el estudio de la conversión y extracción segura de la energía disponible en el viento.

En la literatura se pueden encontrar trabajos donde se lleva a cabo el diseño y la simulación de controladores a través de diferentes técnicas que buscan mejorar el funcionamiento de las turbinas eólicas y que hacen uso de modelos heurísticos para la potencia mecánica, (P), y del coeficiente de potencia, (C_p), de la turbina. En (Heier, 1998) se puede encontrar un modelo que se utiliza frecuentemente y que está dado por

$$P = \frac{1}{2}\rho C_p(\lambda, \alpha) A_R \dot{x}^3, \tag{1}$$

donde

$$C_p = 0{,}5\left(\frac{116}{\lambda_i} - 0{,}4\alpha - 5\right)e^{-\frac{21}{\lambda_i}}, \tag{2}$$

* Investigación patrocinada por los proyectos CONACYT 47583 y UNAM-DGAPA-PAPIIT IN117108

** Estudiante de posgrado, jvillanuevama@iingen.unam.mx

*** Investigador, alvar@pumas.iingen.unam.mx, Corresponsal

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 221-230

con

$$\frac{1}{\lambda_i} = \left(\frac{1}{\lambda + 0{,}08\alpha} - \frac{0{,}035}{\alpha^3 + 1} \right), \tag{3}$$

y

$$\lambda = \frac{R\omega}{\dot{x}}. \tag{4}$$

Aquí,

- A_R es el área de barrido de la turbina
- C_p es el coeficiente de potencia
- $\dot{x}$ es la velocidad del viento
- ρ es la densidad del viento
- λ es la relación de velocidades en la punta de la hélice
- α es el ángulo de ataque de la hélice
- R es el radio de las hélices
- ω es la velocidad angular

En la Fig. 1, se observan las curvas características del coeficiente de potencia (C_p) dado por la Ec. (2) para distintos valores de α.

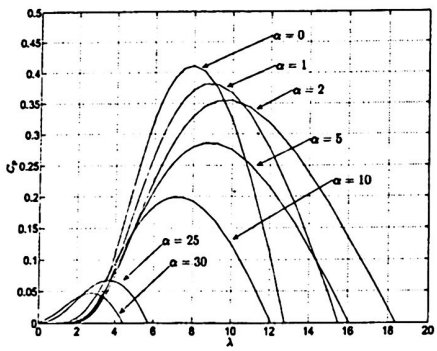


Figura 1. Curvas características de C_p vs λ, para distintos ángulos de ataque.

El coeficiente de potencia es un elemento muy importante dentro del modelo de potencia mecánica de la turbina, ya que es el factor que determina la cantidad de energía cinética que se puede extraer del viento. Tiene un límite teórico (límite de Betz) dado por $C_p \leq 0{,}59$.

En (Villanueva y Alvarez-Icaza, 2007) se puede encontrar una transformación del modelo de C_p que está dada por

$$\lambda' = \frac{\dot{x} - r\omega}{\dot{x}_m}, \quad \dot{x}_m \neq 0, \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{R}{r}\left[1 - \lambda' \frac{\dot{x}_m}{\dot{x}}\right], \tag{6}$$

$$r = R\left[\frac{(0{,}4\alpha + 5) + \dfrac{4{,}06}{\alpha^3 + 1}}{116 - 0{,}08\alpha\left((0{,}4\alpha + 5) + \dfrac{4{,}06}{\alpha^3 + 1}\right)}\right], \tag{7}$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = \left(\frac{1}{\lambda + 0{,}08\alpha} - \frac{0{,}035}{\alpha^3 + 1}\right), \tag{8}$$

$$C_p = sgn(\lambda')0{,}5\left(\frac{116}{\lambda_i} - 0{,}4\alpha - 5\right)e^{-\frac{21}{\lambda_i}}. \tag{9}$$

La Fig. 2 muestra las curvas características para este modelo. Debe notarse la simetría del modelo que describe indistintamente los regímenes de turbina y ventilador.

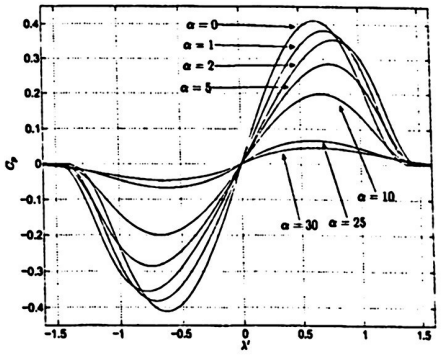


Figura 2. Curvas características de C_p vs λ'.

2. Potencia Mecánica de la turbina.

El interés en controlar una turbina está más relacionado con la potencia mecánica que se puede extraer del viento que con el coeficiente de potencia. Por ello, en esta sección se introducirán dos modelos que están directamente relacionados con la potencia mecánica de la turbina que dependen de la velocidad relativa, dada por

$$\dot{x}_R = \dot{x} - R\omega. \tag{10}$$

Para esto es necesario observar el comportamiento de la potencia mecánica en contra de la velocidad relativa, como se puede apreciar en la Fig. 3 para diferentes valores de la velocidad angular, ω, y α=0, al utilizar las Ecs. (1), (9) y (10).

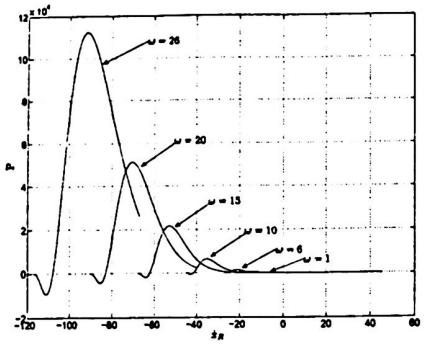


Figura 3. Potencia mecánica vs Velocidad relativa, $\dot{x}_R$.

De la Fig. 3, se observa que cuando $P = 0$ entonces $\dot{x}_R \neq 0$ y su valor es distinto para cada valor de ω. Por ello que se supone que existe una nueva velocidad relativa, $\dot{x}_{r'}$, elegida de tal forma que cumpla con

$$P = 0 \Longleftrightarrow \dot{x}_{r'} = 0,$$

donde

$$\dot{x}_{r'} = \dot{x} - r'\omega, \tag{11}$$

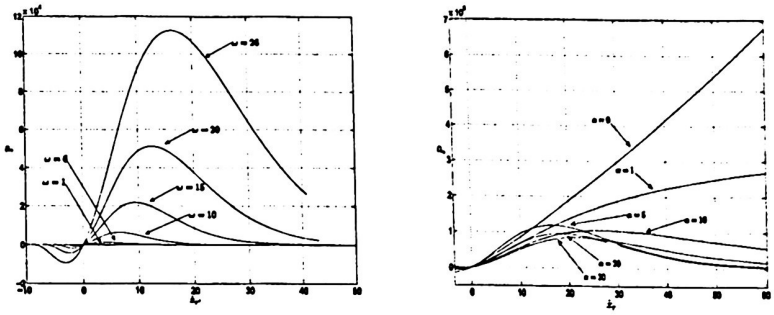
como $\dot{x}$ y ω son conocidas, r' debe satisfacer

$$\dot{x} - r'\omega = 0 \Longleftrightarrow P = 0,$$

de esta manera se tiene que

$$r' = \frac{\dot{x}}{\omega}. \tag{12}$$

Evaluando en los puntos donde $P = 0$ con los valores de $\dot{x}$ y ω, se tiene que $r' = 0{,}078R$ para todos los casos[1]. Se puede observar en la Fig. 4(a), la influencia que existe de la velocidad relativa con la potencia mecánica. La Fig. 4(a) representa también los dos regímenes de las curvas de C_p en la Fig. 2.



(a) Caso 1: α = constante y ω = variable. (b) Caso 2: ω = constante y α = variable.

Figura 4. Potencia mecánica vs Velocidad relativa, $\dot{x}_r$.

Se debe notar que las curvas en la Fig. 4(a) son válidas para el caso de $\alpha = 0$. Al evaluar este mismo para ω constante y α variable, se observó que solo en el caso de $\alpha = 0$ se tiene $P = 0$ cuando $\dot{x}_{r'} = 0$, por lo que se propuso tomar el valor de r dado por la Ec. (7). De esta se tiene que

$$\dot{x}_r = \dot{x} - r\omega, \tag{13}$$

por lo que se obtiene la representación para el caso de ω constante que se muestra en la Fig. 4(b). Se puede observar que se representan también los dos regímenes.

2.1. Modelos de potencia propuestos

Las curvas de la Fig. 4(a) pueden ser usadas para proponer la estructura de los dos modelos en términos de la velocidad relativa. Para tales modelos se considerará un rango de viento donde se pretende tener un valor de potencia positiva en la mayoría de los casos.

[1] El valor obtenido para el caso de estudio fue $R = 4{,}5$ m, de está forma $r' = 0{,}078 \times R = 0{,}351$.

Primer modelo El modelo está dado por

$$P = k_1 e^{(-k_2 \dot{x}_r)} sign(\dot{x}_r) |\dot{x}_r|^{k_3} \dot{x}^3, \tag{14}$$

donde k_1, k_2 y k_3 son los parámetros que se deben de estimar. El modelo está inspirado por la forma de las curvas en la Fig. 4(a) y el trabajo en (Yi *et al.*, 2002). Este modelo puede ser parametrizado de la siguiente forma

$$ln\left(\frac{P}{\dot{x}^3}\right) = [1 \quad \dot{x}_r \quad ln(|\dot{x}_r|)] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix},$$

donde el vector de parámetros está dado como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ln(k_1) \\ -k_2 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

mientras que el regresor está dado por

$$\Phi = [1 \quad \dot{x}_r \quad ln(|\dot{x}_r|)].$$

Por lo que la parte positiva de P puede ser expresada como

$$ln\left(\frac{P}{\dot{x}^3}\right) = \Phi\Sigma. \tag{15}$$

La Ec. (15) permite utilizar el método de mínimos cuadrados recursivos normalizados (ver, por ejemplo, (Ioannou y Sun, 1996)).

Segundo modelo Este modelo está dado por

$$P = 10000\,\sigma_1\,\dot{x}_r + 1000\,\sigma_2\,sign(\dot{x}_r)\,\dot{x}_r^2 + 10\,\sigma_3\,\dot{x}_r^3, \tag{16}$$

el cual está inspirado por la forma de la fuerza de algunos modelos de fricción dinámica (ver (Canudas de Wit *et al.*, 1995)). Este modelo puede ser parametrizado como sigue

$$P = [10000\,\dot{x}_r \quad 1000\,sign(\dot{x}_r)\,\dot{x}_r^2 \quad 10\,\dot{x}_r^3] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

3. Resultados de simulación

Para examinar los modelos propuestos contra el modelo de referencia, se utilizaron los siguientes datos

- $R = 4.5$ m.
- $\dot{x}_m = 15$ m/s.

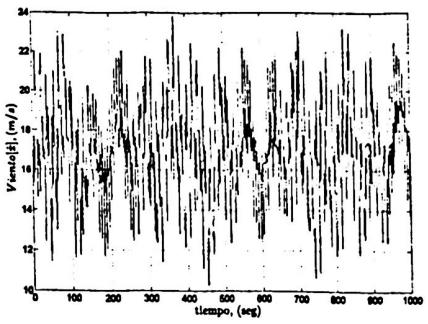


Figura 5. Señal de viento, $\dot{x}$, vs tiempo

- $\alpha = 0$.
- $\rho = 1.225$ kg/m^3.

y como señal de excitación al viento, $\dot{x}$, cuya velocidad está dada por la señal que se observa en la Fig. 5.

Para los valores de ω y α, se tomaron dos casos de evaluación, debido a los dos tipos de generadores que se utilizan. En el primer caso se tomó ω en un rango de 1 a 27 Hz, con $\alpha = 0$, mientras que el segundo a α en el rango de 0° a 30° con $\omega = 26.5$ Hz. Esto permite comparar ambos modelos entre si.

3.1. Caso 1: ω variable, α constante.

Primer modelo Para observar con mejor detalle los resultados, en las figuras se muestran las señales para los valores de ω=1, 10.5, 26.5. Se puede observar en la Fig. 6(a) los resultados de la estimación para el modelo dado por la Ec. (14).

La Fig. 6(b) muestra la evolución de los parámetros con respecto al tiempo, para los mismos casos de ω que se muestran en la Fig. 6(a).

La Fig. 6(c) muestra la variación de los parámetros σ_i contra la variación de ω, la velocidad angular del rotor. Como se puede observar con respecto a las Figs. 6(a), (b) y (c), un conjunto particular de parámetros es válido solamente para una determinada ω.

Segundo modelo En este caso, se tiene la señal de potencia en la Fig. 6(d), que muestra un mejor resultado con respecto al que se observa para el primer modelo en la Fig. 6(a). En la Fig. 6(e) se observa la evolución de los parámetros con respecto al tiempo y en comparación a lo mostrado en la Fig. 6(b), se concluye

que no hay mucha diferencia en el tiempo de evolución. La diferencia entre estos modelos se observa en las Figs. 6(c) y 6(f). En la Fig. 6(f) se puede ver el cambio de los parámetros en contra de ω, para el segundo modelo. Como se observa, estos muestran una complejidad mayor a la mostrada por los parámetros en la Fig. 6(c).

3.2. Caso 2: ω constante, α variable.

Para este caso solo se mostrarán las gráficas de potencia contra el tiempo, mostrando solamente las señales para $\alpha = 0$, 5 y 30, y de los parámetros σ_i versus α, para ambos modelos.

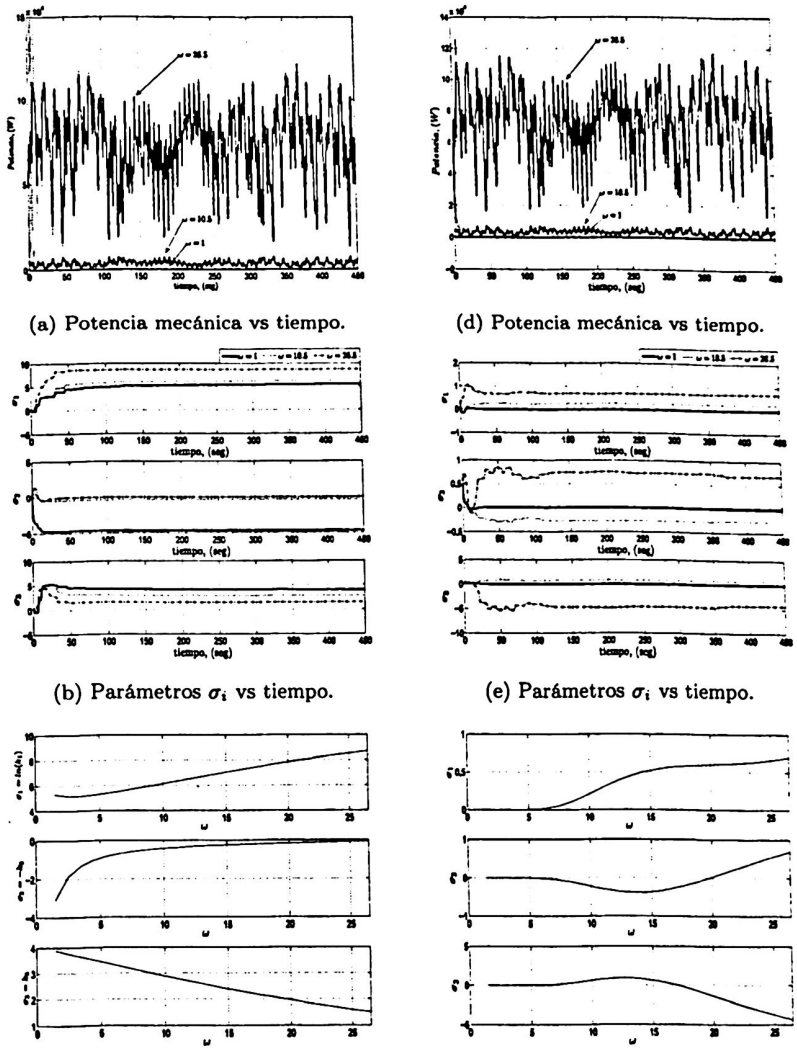
Primer modelo Para este caso los resultados que se observan en la Fig. 7(a) resultan ser muy buenos, al igual que en los casos anteriores. Pero en este caso, se observa que un señal de potencia es negativa cuando $\alpha = 0$, esto significa que se tiene una velocidad relativa negativa, dada por la relación entre el viento y la velocidad angular, lo que significa que el aerogenerador está trabajando como ventilador, caso que no se desea.

En Fig. 7(b) se muestra el comportamiento de los parámetros σ_i con respecto al cambio de valor de α, el cual presenta también un mayor grado de complejidad que en los casos anteriores. Así mismo, se tiene un conjunto particular de parámetros para cada valor de α.

Segundo modelo La Fig. 7(c) muestra un mejor comportamiento del modelo en la potencia con respecto al mostrado en la Fig. 7(a). Se observa en las Figs. 7(b) y 7(d) un resultado similar al mostrado en las Figs. 6(c) y 6(f) que muestran el comportamiento de los parámetros σ_i vs α. Como se puede observar, las señales de la Fig. 7(d) tienen un grado de complejidad mayor al mostrado por las señales de la Fig. 7(b).

4. Conclusiones

Se han presentado dos nuevos modelos para representar la potencia mecánica de una turbina eólica. Estos modelos fueron inspirados por la representación de la fricción pseudo-estática y dinámica, en un intento de reproducir la transformación de energía cinética del viento por las hélices de la turbina como un fenómeno de fricción. Los nuevos modelos hacen uso de la noción de la velocidad relativa que hay entre el viento y las hélices. Los modelos mostraron un comportamiento similar a un modelo heurístico de referencia de la literatura, el cual es muy popular para este tipo de estudios. Existen dos ventajas principales en el uso de las nuevas representaciones. Los parámetros tienen una interpretación física y es posible utilizar técnicas de identificación para obtener sus valores para una turbina dada. Se está realizando el estudio de la dependencia de los parámetros en ω y α, con lo que se espera obtener un modelo global de la potencia. También está en proceso la verificación experimental de estos modelos.



(a) Potencia mecánica vs tiempo.

(d) Potencia mecánica vs tiempo.

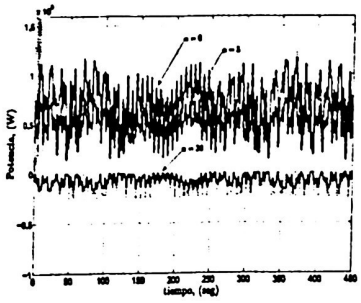
(b) Parámetros σ_i vs tiempo.

(e) Parámetros σ_i vs tiempo.

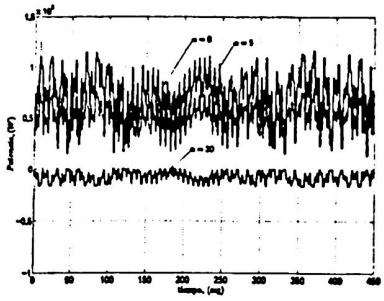
(c) Parámetros σ_i vs ω.

(f) Parámetros σ_i vs ω.

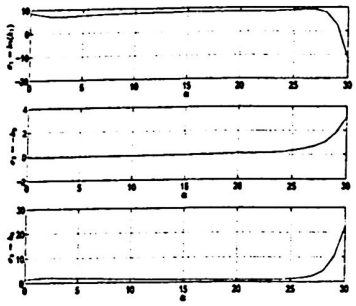
Figura 6. Se muestran los resultados de simulación obtenidos en el caso 1, los resultados del primer modelo se muestran en (a), (b) y (c), y para el segundo modelo se tienen en (d), (e) y (f).



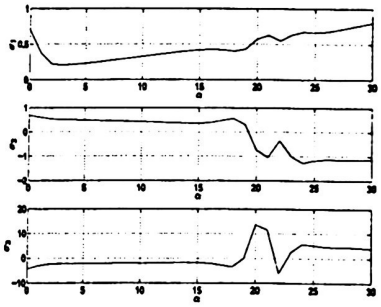
(a) Potencia mecánica vs tiempo



(c) Potencia mecánica vs tiempo



(b) Parámetros σ_i vs α



(d) Parámetros σ_i vs α

Figura 7. Se muestran los resultados de simulación obtenidos en el caso 2, los resultados del primer modelo se muestran en (a) y (b), para el segundo modelo se tienen en (c) y (d), donde en (a) y (c) la linea de referencia: continua, y la estimada: discontinua.

Referencias

Canudas de Wit, C., H. Olsson, J. Åstrom y P. Lischinsky (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transaction on Automatic Control* **40**(3), 419–425.

Heier, S. (1998). *Grid Integration of Wind Energy Conversion Systems.* Wiley.

Ioannou, Petros A. y Jing Sun (1996). *Robust Adaptive Control.* PTR Prentice-Hall.

Villanueva, J. y L. Alvarez-Icaza (2007). Modelado del coeficiente de potencia de un aerogenerador por efecto de fricción.. *Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático, AMCA'73* pp. 1–6.

Yi, J., L. Alvarez y R. Horowitz (2002). Adaptive emergency braking control with underestimation of friction coefficient. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **10**, 381–392.

Estrategias Activas y Pasivas para el Ahorro Eléctrico en Viviendas

Julio César Avila y Dr. José de Jesús Rodríguez[1]

Mecatrónica y Tecnologías de Información-ITESM,
64849 Nuevo León, México
Teléfono: (52)-81-8358 2000 Ext. 5486
julio.avila@exatec.itesm.mx y [1]jjrodriguez@itesm.mx

Resumen—Gran parte de la electricidad se desperdicia por uso ineficiente y se han propuesto métodos que permiten eficientar su uso en las viviendas reduciendo el consumo eléctrico y el costo económico y ecológico. Algunos requieren la participación activa del usuario, otros son estrategias pasivas, y otros implican el uso de controles automáticos. En promedio el 44% de la electricidad en el hogar es consumida por aires acondicionados y el 33% por iluminación. Este documento muestra el impacto económico que resulta al utilizar equipos ahorradores en iluminación y aire acondicionado en una vivienda y da un ejemplo de reducción de consumo eléctrico en las áreas de iluminación y acondicionamiento de ambiente con un ahorro del 69.2% en iluminación; además, muestra una estrategia de automatización inteligente con uso de sensores de presencia con la cual se espera un ahorro integrado mayor al 30% en esas áreas.

Palabras clave: Ahorro de energía, Automatización de edificios.

1 Introducción

El desperdicio de energía generada con recursos no renovables es un problema grave que puede acabar con estos recursos. Existen dos alternativas: utilizar recursos renovables como el viento o el flujo de agua para generar electricidad; o modificar el comportamiento de la gente para reducir el desperdicio de energía en los hogares.

Según la CONAFOVI[1] en el 2004 el 19.3% de la energía fue consumida por el sector residencial; y de acuerdo con la CONAE[2] el 44% de la electricidad en una vivienda es consumida por acondicionamiento y el 33% por iluminación. Haciendo uso eficiente de la electricidad en los aspectos de acondicionamiento e iluminación puede lograrse una reducción considerable en su consumo eléctrico.

Para usar eficientemente la electricidad en aspectos de acondicionamiento e iluminación, varias organizaciones presentan propuestas, que van desde cambiar focos incandescentes por lámparas fluorescentes hasta el uso de complicados sistemas que otorgan a las viviendas cierto grado de automatización.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 231-240

Hay que hacer notar que estas recomendaciones evitan salir del confort estadístico; no tiene caso reducir el consumo eléctrico a costa del confort. La mayoría de las personas encuentran confortable un ambiente con una temperaturas entre 20 y 24°C en verano y entre 23 y 27°C en invierno, humedad relativa entre 40 y 60%, y una velocidad del viento entre 13.7 y 30.5 (m/minuto)[3].

Si se utiliza equipo ahorrador se logra una disminución en el consumo eléctrico. En este artículo se muestra un breve estudio del consumo de una vivienda al usar equipo convencional y al usar equipo ahorrador en aire acondicionado e iluminación. Además, muestra una estrategia de automatización inteligente con uso de sensores de presencia con la cual se espera un ahorro integrado mayor al 30% en estas áreas.

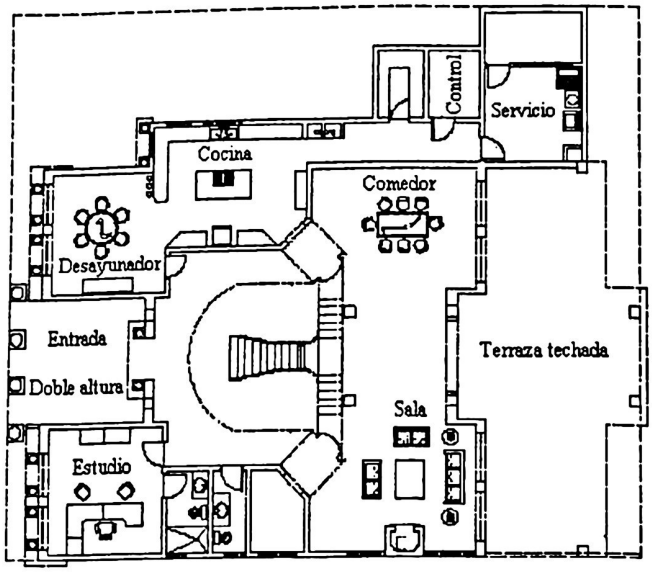


Figura 1. Plano de la planta baja de la residencia en estudio.

2 Instalación Estándar

Esta sección explica las características básicas de una casa a la que se aplican las estrategias de reducción de consumo eléctrico aquí presentadas. La casa tiene dos plantas y una superficie construida de 465m^2. Se orienta de norte a sur y se utilizaron materiales comunes y aislantes térmicos en la construcción.

La figura 1 muestra la planta baja de la casa. El techo está a 2.8m de altura. La planta baja puede ser dividida en 4 áreas: escaleras, sala y comedor forman la primer área con 138m^2; el estudio y su baño forman la segunda área con 30m^2; mientras que

desayunador, cocina y cuarto de servicio forman la tercer área de 80m^2 y la cuarta es el cuarto de control que tiene 5.6m^2.

El estudio tiene un área de 22m^2 y la actividad allí es altamente sedentaria. Requiere 300 luxes de iluminación general y 100 luxes más, en el escritorio, como iluminación local. La iluminación general se hace con 4 lámparas fluorescentes compactas de 14W empotradas en el techo y la carga térmica es de 14,820 (BTU/h) por lo que se requieren 1.2 Toneladas de Refrigeración (TTR's). El baño se ilumina con un foco incandescente de 40W y con dos focos de 25W a los lados del espejo.

El área del comedor es de 32m^2. La iluminación recomendada es de 150 luxes; esto se logra con 4 focos incandescentes de 40W y, en la pared, un par de lámparas fluorescentes de 14W para complementar la iluminación.

La sala es de 6.5m x 4.8m, requiere 500 luxes, lo que se logra usando seis lámparas fluorescentes de 14W suspendidas a 0.5m del techo.

El área de las escaleras es de 80m^2. Se ilumina con 150 luxes que se obtienen de 9 focos incandescentes de 40W. La sala, el comedor y las escaleras suman un área de 143m^2, la carga térmica de estas tres zonas es de 46,965BTU/h ó 3.9 TTR's.

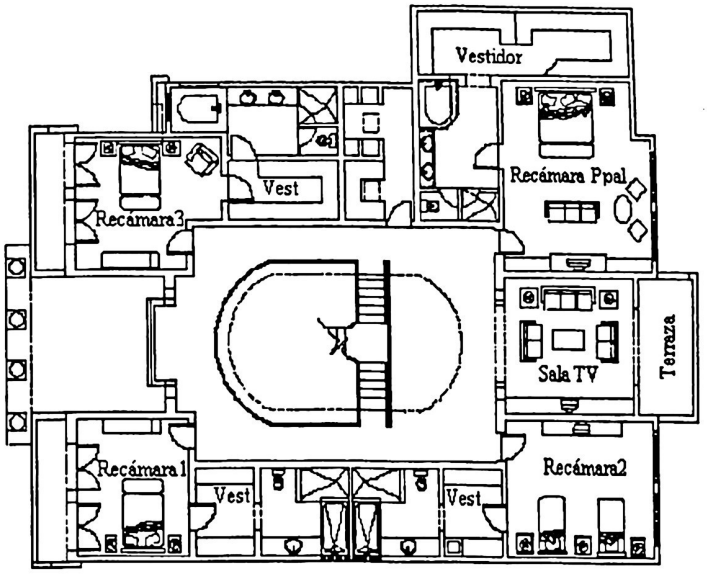


Figura 2. Plano de la planta alta de la residencia en estudio.

El segundo piso, mostrado en la figura 2, tiene 314.61m^2, el techo está a 2.70m y se puede dividir en seis áreas, cada una incluye una recámara con baño y vestidor; la quinta área es la sala de Tv y la sexta es el área de las escaleras. La recámara principal tiene un área total de 70.93m^2; la recámara 1 tiene 33.97m^2; la recámara 2 tiene 42m^2; la recámara 3 tiene 43m^2 y la sala de Tv 22m^2. Para reducir la necesidad de acondicionamiento de gran capacidad, no se climatizan baños ni vestidores.

La recámara Ppal. es de 38m^2; se ilumina con 300 luxes, que se obtienen con seis lámparas incandescentes de 60W empotradas en el techo; la carga térmica es de 23,223BTU/h ó 1.9TTR's. El vestidor se ilumina con dos lámparas halogenadas de 35W; mientras que el baño requiere dos halogenadas de 35W y tres incandescentes de 25W

La recámara 1 tiene 18.5m^2 y requiere 300 luxes que se obtienen con cuatro focos incandescentes de 60W empotrados en el techo; la carga térmica es de 17,138 BTU/h ó 1.4 TTR's. El baño se ilumina con una lámpara halogenada de 35W y dos incandescentes de 25W; mientras que el vestidor con una halogenada de 35W.

La recámara 2 es de 26m^2 y requiere 300 luxes, y tabmién se utilizan cuatro focos incandescentes de 60W empotrados al techo; pero la carga térmica en este caso es de 17,420 BTU/h ó 1.5 TTR's. El vestidor se ilumina con una lámpara halogenada de 35W, y el baño usa una halogenada de 35W y dos incandescentes de 25W.

La recámara 3 tiene un área de 26m^2 y se requiere de 300 luxes, se utilizan cinco focos de 60W empotradas al techo, la carga térmica de esta recámara es de 19,603BTU/h ó 1.6 TTR's. Se requieren también dos lámparas halogenadas en el vestidor y seis en el baño (tres de 25W y otras tres de 40W).

	Zona	Área	Incandescente			Fluorescente	Halógenada	BTU/h	TTR's
			25	40	60	14	35		
Primer piso	Estudio	21.97				4		14820	1.2
	Baño	5.05	2	1					
	Sala	30.94				6		46421	3.9
	Comedor	31.28		4		2			
	Común	27.92		4					
	Escalera	52.34		5					
Segundo piso	Rec. Ppal	37.89			6			23223	1.9
	Vest. Ppal	18.64					2		
	Baño Ppal	14.40	3				2		
	Rec1	18.15			4			17138	1.4
	Rec1 vest	6.25					1		
	Rec1 bño	9.57	2				1		
	Rec2	26.02			4			17420	1.5
	Rec2 vest	6.40					1		
	Rec2 bño	9.57	2				1		
	Rec3	28.72			5			19603	1.6
	Rec3 vest	8.66					2		
	Rec3 bño	9.79	3	3					
	Tv	22.76				4		22910	1.9

Figura 3. Potencia requerida para iluminar y climatizar todas las áreas de la residencia.

En total se requiere de una potencia eléctrica para iluminación de 2,834W; para el primer piso 918W y 1,916W para el segundo. Además, se requieren 13.4 TTR's para mantener confortable el espacio interior. La figura 3 desglosa estos datos.

3 Mejora en Acondicionamiento

El clima artificial es el mayor consumidor eléctrico en la vivienda, por lo que la primera estrategia es la colocación de equipo acondicionador de aire eficiente.

Los equipos de aire acondicionado se compran de acuerdo a su capacidad de enfriamiento, la cual se mide en toneladas de refrigeración. *Una tonelada de refrigeración es igual a 12,000 BTU/h.* Es importante saber la capacidad de enfriamiento necesaria en el cuarto para no exceder ni quedar bajos en capacidad.

Además, la eficiencia de los equipos es un dato importante ya que mide la cantidad de BTU/h que un aparato entrega por cada W que consume; este número se llama EER[1] o SEER[2] y actualmente está entre los 8.5 y 10.8; entre más grande el SEER, más eficiente el equipo. Por ejemplo, un equipo de 10 SEER retira del ambiente 10,000 BTU/h por cada KW que consume.

Analizando las unidades en energías:

$$1 \text{ BTU} = 1055.056 \text{ J} = 1055.56 \text{ Nm} = 1055.56 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 . \quad (1)$$

Mientras que en potencias:

$$1 \text{ BTU/h} = 0.293 \text{ J/s} = 0.293 \text{ W} . \quad (2)$$

Una comparación entre tres tipos de minisplit comerciales, de dos toneladas pero de distinto SEER comprueba la cantidad de energía que se ahorra al utilizar el más eficiente. La tabla 1 muestra las características de estos equipos.

Tabla 1. Características de tres minisplits.

Marca	Carrier	LG	EcoFreeze
Modelo	53FQXP243C	S242HG	SK-F-241
Capacidad (Toneladas)	2	2	2
(V-F-Hz)	220-1-60	220-1-60	220-1-60
Corriente (A)	11.82	11	8.6
Flujo de aire (m^3/h)		2520	850
Consumo energía (W)	2500	2550	1900
Eficiencia (SEER)	10.1	10.2	12.6
Precio	$ 10,059.78	$ 11,304.50	$ 10,637.50

Al comparar estos equipos sólo por su eficiencia energética se puede obtener el ahorro al usar el equipo de mayor SEER. Si los tres equipos se mantienen encendidos durante 8 horas diarias por 30 días, al final de las 240 horas habrán retirado del ambiente 5,760,000BTU's; pero el primero (modelo 53FQXP243C) habrá consumido 570.297kW, el segundo (modelo S242HG) habrá consumido 472.131kWh y el tercero (modelo SK-F-241) 457.143kW, lo cual en promedio es un consumo de 2.376kWh para el primero, de 1.967kWh para el segundo y de 1.905kWh para el tercero; si el costo del kWh es de $0.657[3], por el primero se pagará $374.69, por el segundo $310.19 y por el tercero $300.34; se produce un ahorro del 17.2% entre el primero y el segundo, y del 20% entre el primero y el tercero sólo por la eficiencia del equipo.

[1]Energy Efficiency Ratio o Razón de eficiencia energética estacional.

[2]Seasonal Energy Efficiency Ratio o Razón de eficiencia energética.

[3] Tarifa doméstica 1A permitida para octubre del 2008 en temporada fuera de verano. www.cfe.gob.mx

Al considerar los precios de adquisición de estos equipos se tiene un tiempo de retorno de inversión de 7 meses y 23 días al comprar el más eficiente.

La mayoría de los acondicionadores pequeños tienen un compresor convencional que trabaja siempre a velocidad máxima; en ese caso el control de temperatura se realiza de la siguiente manera: cuando la temperatura deseada es menor que la temperatura actual, se enciende el compresor a su capacidad máxima; y cuando se alcanza la temperatura deseada, se apaga el compresor; cuando el compresor está apagado, la temperatura del aire aumenta paulatinamente hasta que sale de la banda de tolerancia y el compresor vuelve a encender. Estos ciclos de re-encendido se realizan automáticamente sin que el usuario lo note y producen picos de consumo que elevan el costo de la electricidad y reducen la vida del compresor. Al agregar un variador de velocidad al compresor, equipo de aire acondicionado puede variar su capacidad de enfriamiento de acuerdo a los requerimientos de temperatura. Esto permite al compresor variar su velocidad de trabajo permaneciendo encendido más tiempo, alcanzando la temperatura deseada más rápidamente, controlando mejor la temperatura y evitando picos de consumo. Los ciclos de re-encendido no se presentan en los equipos que cuentan con variadores de velocidad.

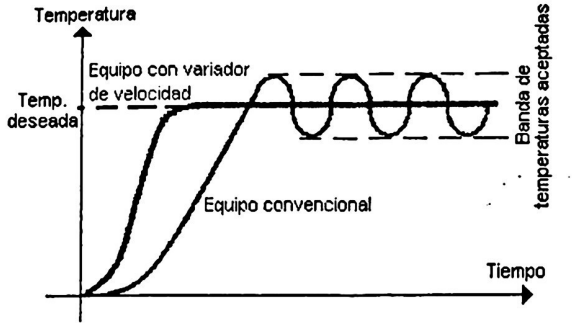


Figura 4. Comparación entre las temperaturas alcanzadas por un equipo con inversor y uno convencional.

La figura 4 muestra un comparativo entre el comportamiento de un equipo de aire acondicionado con variador de velocidad y uno convencional.

4 Mejoras en Iluminación

El siguiente sistema es el de iluminación; entonces, la siguiente estrategia es cambiar los focos incandescentes por fluorescentes compactos.

En algunas áreas se prefieren los focos incandescentes por la velocidad de encendido, por el IRC o por la capacidad de atenuación que presentan; sin embargo, ya existen en el mercado lámparas fluorescentes compactas que cuentan con esas características y bajo consumo eléctrico. El hecho de remplazar las lámparas por unas

más eficientes reduce el consumo eléctrico por iluminación de 2,834W a 872W, un 69.2%; y la carga térmica de 161,535 BTU/h a 157,404 BTU/h, un 2.55% según los cálculos de las figuras 3 y 5. La figura 5 desglosa los cambios que trae la estrategia.

	Zona	Area	Incandescente	Fluorescente			Halogenada	BTU/h	TR's
				9	14	15	35		
Primer piso	Estudio	21.97			4			14820	1.2
	Baño	5.05		3					
	Sala	30.94			6			45197	3.8
	Comedor	31.28			2	4			
	Común	27.92			4				
	Escalera	52.34			6				
Segundo piso	Rec. Ppal	37.89				6		22305	1.9
	Vest. Ppal	18.04					2		
	Baño Ppal	14.40		3			2		
	Rec1	18.15				4		16526	1.4
	Rec1 vest	6.25					1		
	Rec1 bño	9.57		2			1		
	Rec2	26.02				4		16808	1.4
	Rec2 vest	6.40					1		
	Rec2 bño	9.57		2			1		
	Rec3	28.72				5		18838	1.6
	Rec3 vest	8.66					2		
	Rec3 bño	9.79		3	3				
	Tv	22.76				4		22910	1.9

Figura 5. Desglose de las lámparas que se sustituyen y la reducción en carga térmica debida a este cambio.

5 Sensar Presencia

Otra estrategia activa para reducir el consumo tiene que ver con apagar las luces y los equipos de acondicionamiento al salir. Solamente cuando haya personas en el área deben estar encendidas las luces y la temperatura agradable; si no hay personas en un lugar, no es necesario forzar la temperatura a un nivel confortable.

La tercera estrategia es utilizar sensores de presencia en las diferentes áreas para controlar la iluminación y el clima. Algunos fabricantes de equipo de aire acondicionado ya están incluyendo sensores de presencia infrarrojos para elevar el Setpoint (SP) de temperatura cuando no hay personas.

Es necesario analizar cuál es el sensor más adecuado para el lugar que se desea monitorear. Todos los cuerpos emiten cierta cantidad de radiación infrarroja, los sensores infrarrojos pasivos (PIR) detectan esa radiación y la usan para saber si hay personas, sin importar si la persona se mueve o no, una de las mayores desventajas de estos sensores es que solamente detectan en *"línea de vista"*. Existe otro método de detección de personas el cual consiste en enviar ondas ultrasónicas y utilizar el efecto Doppler para detectar movimiento; la desventaja de este método es que si la persona no se mueve por un rato, el sensor deja de detectarla. Existen también en el mercado sensores que reúnen las ventajas de ambas tecnologías en el mismo encapsulado y pueden detectar tanto calor como movimiento; sin embargo, sueles son más caros.

Los sensores PIR pueden colocarse en las recámaras, comedor, sala, estudio, o en cualquier lugar que no tenga barreras; mientras que los ultrasónicos se utilizan en esos lugares con barreras o donde exista mayor movimiento de personas.

6 Estrategia Propuesta

En esta sección se explica un sistema de reglas para variar la temperatura interna de un lugar y modificar su iluminación para lograr un ahorro mayor al 30%, estas reglas implican el uso de una automatización inteligente al usar sensores de temperatura y presencia.

6.1 Estrategia Propuesta por Horario

Con las estrategias antes mencionadas (cambiar focos incandescentes por fluorescentes compactos, utilizar equipos acondicionadores de aire de mayor eficiencia, y la aplicación de sensores de presencia y temperatura) se obtiene un ahorro en el consumo eléctrico. Sin embargo, este ahorro puede incrementarse al agregar un dispositivo de control, ya sea PLC's o computadoras, que indique al resto de los dispositivos cuándo actuar. Estos controladores pueden ser programados con una estrategia como la presentada en [4], donde se comprueba, por simulación, un ahorro integrado del 30% en iluminación y acondicionamiento de ambiente.

Esta propuesta consiste en considerar la temperatura exterior de un local para modificar el SP de temperatura interna hasta 8°C debajo de la temperatura exterior de acuerdo al horario de trabajo. Es decir, si la temperatura exterior es de 30°C y no debe haber usuarios en el local, el SP puede configurarse en 22°C; pero si la temperatura exterior es menor a 30°C y no hay usuarios, se puede apagar el equipo de acondicionamiento. En cuanto a la iluminación, se propone apagar las luces cuando no deba haber personas en el local. La figura 6 muestra el diagrama de flujo de esta estrategia, primero se toman los datos de temperatura exterior y horario, luego se pregunta si debe haber personas en el interior del local; si no debe haber personas, se calcula un Setpoint virtual (SPV) 8°C menor a la temperatura exterior y, si este SPV resulta menor que 22°C (considerando 22°C la temperatura de confort), se puede apagar el acondicionador de aire; en caso contrario, el nuevo SP de temperatura interna se vuelve igual al SPV. En caso de que si deba haber usuarios, se utiliza una tabla para modificar el SP de temperatura de acuerdo a la temperatura exterior.

6.2 Estrategia Propuesta con Sensores

Basarse solamente en el horario para controlar la temperatura de un lugar puede no traer un ahorro suficiente porque puede que los usuarios hayan salido, pero regresen.

Por eso se propone un cambio a la estrategia agregando el uso de sensores para detectar la presencia de personas y poder controlar no solo la temperatura interna,

sino también la iluminación. El cambio se realiza en el bloque de *"Hay usuarios"* del diagrama en la figura 6. En la sección anterior se recurre a un horario para saber si debe o no haber personas en el interior de un lugar, en esta propuesta se recurre a sensores de presencia o movimiento para salir de ese bloque.

El ahorro esperado con este cambio es mayor al 30% obtenido con la estrategia presentada en [3].

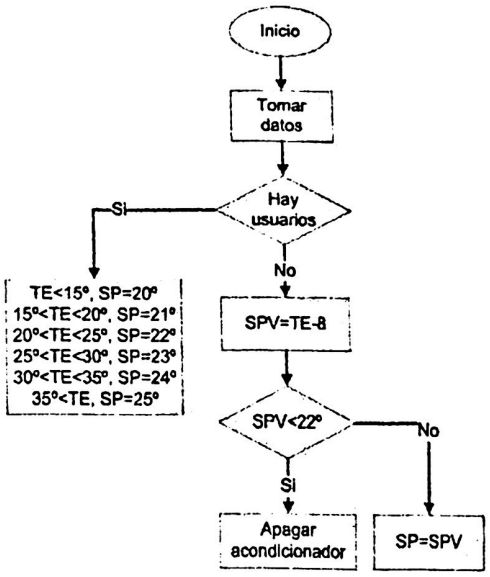


Figura 6. Diagrama de flujo de la propuesta 6.1.

7 Sistemas Domóticos

La última frontera para reducir el consumo eléctrico es que todos los sistemas de la vivienda se encuentren integrados y controlados por un solo ente que tenga por objetivo el ahorro eléctrico manteniendo el confort y la seguridad de los habitantes. Estos sistemas son domóticos porque automatizan muchas de las actividades que se realizan en la casa; hay sistemas abiertos y hay sistemas cerrados, generalmente los dispositivos de un sistemas cerrado no puede comunicarse con dispositivos de otro.

Estos sistemas desarrollados permiten variar la temperatura, la intensidad luminosa, el volumen de la música ambiental, controlan el encendido y apagado de la bomba de agua, y muchas funciones más. Algunos son alámbricos, otros son inalámbricos; algunos permiten la creación de escenarios; otros tienen la capacidad de ser controlados desde Internet; pero suelen ser muy costosos al inicio.

Conclusiones

Existen varias estrategias (automatizadas, activas y pasivas) para reducir el consumo eléctrico en las viviendas.

Se deben utilizar equipos de aire acondicionado de alta eficiencia pues permiten una recuperación de la inversión más rápida y mayor ahorro. En el ejemplo se recuperó la inversión en menos de 8 meses con un ahorro de 20%, equivalente a $74 mensuales.

La iluminación es uno de los sistemas que más consumen energía en una vivienda. Es por esto que se hace necesario analizar y reducir el consumo en esta área; una de las maneras más sencillas de hacerlo es cambiar las luminarias. Se analizó el consumo de una residencia determinada y se logró una reducción del 69.2% en iluminación.

Se pueden usar sensores de presencia que permitan la modificación en la temperatura interna y la iluminación, esto implica el uso de una automatización inteligente donde se utiliza un conjunto de reglas para automatizar las modificaciones en los SP de temperatura interna e iluminación. Esta estrategia utiliza también la temperatura exterior del local. La figura 6 muestra una estrategia de este tipo y se espera lograr un ahorro integrado mayor al 30% en acondicionamiento e iluminación.

Existen sistemas domóticos que automatizan algunas de las actividades de la casa y pueden resultar aceptables; sin embargo, requieren una inversión inicial alta.

Es visible que, al aplicar estrategias (activas, pasivas y automatizadas) de ahorro de energía, se logra una reducción considerable en el consumo, y las consecuencias económicas y ecológicas de este ahorro sirven como motivación.

Como trabajo futuro queda realizar pruebas de consumo eléctrico en viviendas aplicando la estrategia de la figura 6.

Agradecimientos

Agradezco al Arq. Juan Pablo Hernández y al Ing. Fernando Rodríguez Ortiz por la ayuda prestada para el cálculo de cargas térmicas.

Referencias

1. CONAFOVI. Guía para el Uso Eficiente de la Energía en la Vivienda. Comisión Nacional de Fomento a la Vivienda. México D.F. (2006).
2. CONAE, http://www.conae.gob.mx
3. Rodríguez, C. F. Control Inteligente de Edificios. ITESM, Campus Monterrey. (1998).
4. Ávila, J.C. Metodología para Reducir el Consumo Eléctrico en Edificios Mediante el Control de los Procesos de Iluminación y Acondicionamiento de Ambiente. ITESM, Campus Monterrey. (2008).
5. Skyfreeze, http://www.skyfreeze.ecofreezeinternational.com
6. Todoenclimas, http://www.todoenclimas.com/tc

Modelado y Simulación de un Generador de Inducción Tipo Jaula de Ardilla.

Aldo Sánchez[1], Gerardo Guerrero[2], Manuel Adam[3]

[1,2,3] Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET, Interior Internado Palmira s/n, C.P. 62490 Cuernavaca, Mor., México
asjovi06e@cenidet.edu.mx, gerardog@cenidet.edu.mx, adam@cenidet.edu.mx

Resumen. Este artículo presenta el modelado de un generador de inducción tipo jaula de ardilla (GIJA) en el marco de referencia fijo al estator (MRFE), el generador se maneja por medio de un pri-motor a velocidad constante, (el pri-motor puede ser una turbina de viento, para simular una planta de generación eoloeléctrica). Se presenta la simulación del GIJA alimentando una carga resistiva (R) y también a un motor de inducción tipo jaula de ardilla.

Palabras clave: Generador de inducción, Motor de inducción, Auto-excitación, Inductancia de magnetización.

1 Introducción

El viento es una fuente de energía gratuita, inagotable y muy poderosa, debido a ello es importante saber utilizarla para el provecho de la sociedad. A partir de esta fuente de energía es posible generar energía eléctrica a través de una planta de generación eoloeléctrica. Una planta de generación eoloeléctrica es un sistema que transforma la energía cinética del viento en energía eléctrica. Se encuentra compuesta principalmente por una turbina eólica, un generador eléctrico y una carga que alimentar. Una turbina eólica es un dispositivo capaz de transformar la energía cinética del viento en energía mecánica (movimiento). El generador eléctrico es un dispositivo que convierte energía mecánica (movimiento) en energía eléctrica.

Una máquina de inducción puede trabajar como generador autónomo si se le hace girar a una velocidad superior a su velocidad síncrona y si se conecta el adecuado banco trifásico de capacitores en sus terminales de estator, que le proporcione la potencia reactiva necesaria para generar su campo magnético.

El GIJA es ampliamente utilizado debido a que presenta algunas ventajas como lo son: robustez, tamaño pequeño, construcción simple, bajo costo de mantenimiento, son baratos y tienen protección natural contra cortos circuitos. Así, un generador de inducción se puede utilizar para generar y suministrar energía eléctrica a lugares aislados, donde no es posible la distribución de energía a partir de una central eléctrica.

---

[1] Estudiante de postgrado en el CENIDET.
[2] Profesor-Investigador en el CENIDET.
[3] Profesor-Investigador en el CENIDET.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 241-250

2 Generador de Inducción Jaula de Ardilla

Si con un pri-motor se impulsa una máquina de inducción hasta hacerla girar a una velocidad superior a su velocidad síncrona, trabajará como generador. La máquina de inducción, trabajando como generador no tiene un circuito independiente para su excitación, por lo cual se debe de proveer la excitación necesaria para establecer el campo magnético en el entrehierro, misma que puede ser suministrada conectando a las terminales del estator un banco trifásico de capacitores, como se muestra en la Fig. 1.

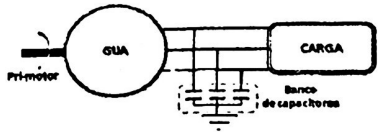


Fig. 1. GIJA autónomo.

En el arranque del generador de inducción, la fuerza electromotriz y las corrientes inducidas en los devanados se incrementarán hasta alcanzar un punto de equilibrio debido a la saturación magnética en la máquina. El magnetismo residual en el rotor establece el voltaje inicial, el cual se incrementa con la corriente del capacitor lo que provoca un incremento continuo del voltaje. Para que ocurra el proceso de auto-excitación en el generador se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Debe de haber suficiente magnetismo residual en el rotor de la máquina.
- El banco trifásico de capacitores debe ser de un valor adecuado.

3 Modelado del GIJA

El modelo trifásico del GIJA fue simplificado utilizando la teoría del marco de referencia, a un modelo bifásico (qd0); el modelo seleccionado es el del MRFE, por lo cual la velocidad angular del Marco de Referencia es 0, ($\omega_c=0$). En la Fig. 2, se observan los circuitos que representan al GIJA en el MRFE.

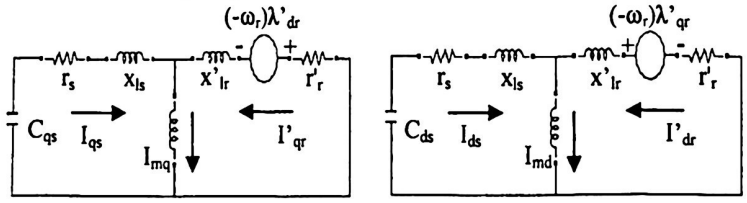


Fig. 2. Circuitos del GIJA en el MRFE, ejes *q* y *d*.

Las ecuaciones que representan al GIJA se obtienen de los circuitos mostrados en la Fig. 2:

$$\begin{aligned} V_{qsc} + r_s I_{qs} + p\lambda_{qs} &= 0 \\ V_{dsc} + r_s I_{ds} + p\lambda_{ds} &= 0 \\ r_r' I_{qr}' - \omega_r \lambda_{dr}' + p\lambda_{qr}' &= 0 \\ r_r' I_{dr}' + \omega_r \lambda_{qr}' + p\lambda_{dr}' &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde V_{qsc} y V_{dsc} son los voltajes en los capacitores del eje q y d; r_s y r'_r son las resistencias del estator y del rotor; I_{qs} y I'_{qr} son las corrientes del estator y del rotor del eje q; I_{ds} y I'_{dr} son las corrientes del estator y del rotor del eje d; ω_r es la velocidad del rotor; p representa el operador derivada; λ_{qs} y λ'_{qr} son los enlaces de flujo del estator y del rotor del eje q; λ_{ds} y λ'_{dr} son los enlaces de flujo del estator y del rotor del eje d.

Los enlaces de flujo para los devanados del estator y del rotor están dados por:

$$\begin{aligned} \lambda_{qs} &= L_s I_{qs} + L_M I_{qr}' \\ \lambda_{ds} &= L_s I_{ds} + L_M I_{dr}' \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{qr}' &= L_r' I_{qr}' + L_M I_{qs} + \lambda_{qr0}' \\ \lambda_{dr}' &= L_r' I_{dr}' + L_M I_{ds} + \lambda_{dr0}' \end{aligned} \tag{3}$$

donde L_s y L'_r son las inductancias del estator y del rotor; L_M es la inductancia de magnetización; $\lambda'_{qr0} = \lambda'_{qr}|_{t=0}$ y $\lambda'_{dr0} = \lambda'_{dr}|_{t=0}$, son los enlaces de flujo residuales. Estos enlaces de flujo residuales y la velocidad del rotor provocan que se forme un voltaje rotacional, el cual está dado por:

$$\omega_r \lambda_{qr}' = \omega_r \left(L_r' I_{qr}' + L_M I_{qs} + \lambda_{qr0}' \right) = \omega_r \left(L_r' I_{qr}' + L_M I_{qs} \right) + K_{dr} \tag{4}$$

$$\omega_r \lambda_{dr}' = \omega_r \left(L_r' I_{dr}' + L_M I_{ds} + \lambda_{dr0}' \right) = \omega_r \left(L_r' I_{dr}' + L_M I_{ds} \right) + K_{qr} \tag{5}$$

donde $K_{dr} = \omega_r \lambda'_{qr0}$ y $K_{qr} = \omega_r \lambda'_{dr0}$ son voltajes iniciales inducidos debidos al flujo magnético residual. Sustituyendo (2), (3), (4) y (5) en (1) se obtienen las ecuaciones que representan al GIJA en el MRFE:

$$\begin{aligned} V_{qsc} + r_s I_{qs} + L_s p I_{qs} + L_M p I_{qr}' &= 0 \\ V_{dsc} + r_s I_{ds} + L_s p I_{ds} + L_M p I_{dr}' &= 0 \\ r_r' I_{qr}' - \omega_r L_r' I_{dr}' - \omega_r L_M I_{ds} - K_{qr} + L_r' p I_{qr}' + L_M p I_{qs} &= 0 \\ r_r' I_{dr}' + \omega_r L_r' I_{qr}' + \omega_r L_M I_{qs} + K_{qr} + L_r' p I_{dr}' + L_M p I_{ds} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

En donde:

$$\begin{aligned} V_{qsc} &= \frac{1}{C_{qs}} \int I_{qs} dt + V_{qsc0} \\ V_{dsc} &= \frac{1}{C_{ds}} \int I_{ds} dt + V_{dsc0} \end{aligned} \tag{7}$$

donde V_{qsc0} y V_{dsc0} son los voltajes iniciales en los capacitores de auto-excitación; C_{qs} y C_{ds} son las capacitancias de los capacitores en los ejes q y d.

De (6) se obtiene la representación matricial del GIJA, la cual está dada por:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_s+L_s p & 0 & L_M p & 0\\ 0 & r_s+L_s p & 0 & L_M p\\ L_M p & -\omega_r L_M & r_r'+L_r' p & -\omega_r L_r'\\ \omega_r L_M & L_M p & \omega_r L_r' & r_r'+L_r' p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{qs}\\ I_{ds}\\ I_{qr}'\\ I_{dr}'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}V_{qsc}\\ V_{dsc}\\ -K_{qr}\\ K_{dr}\end{bmatrix} \tag{8}$$

Cuando se hace trabajar a la máquina de inducción como generador, es necesario e importante tomar en cuenta la saturación magnética de la máquina e incluirla en el modelo de simulación del GIJA, ya que la variación de la inductancia de magnetización es la razón principal para que se lleve a cabo el proceso de auto-excitación.

Una forma de incluir la saturación de la máquina es encontrar la corriente *rms* de magnetización, la cual está dada como:

$$I_{mq}=I_{qs}+I_{qr}' \quad ; \quad I_{md}=I_{ds}+I_{dr}' \tag{9}$$

$$I_m=\sqrt{\left(I_{mq}\right)^2+\left(I_{md}\right)^2}/\sqrt{2} \tag{10}$$

La variación de la inductancia de magnetización se aproxima de forma usual mediante una curva polinomial en función de la corriente de magnetización como:

$$L_M=a_1 I_m^4+a_2 I_m^3+a_3 I_m^2+a_4 I_m+a_5 \tag{11}$$

De esta manera, con (7), (8), (9), (10) y (11) se tiene el modelo del GIJA completo y listo para llevar a cabo las simulaciones pertinentes.

4 Condiciones para la Auto-excitación

La auto-excitación en un generador de inducción es el incremento de la corriente y el incremento asociado en el voltaje a través de los capacitores sin un sistema de excitación externo. El proceso del aumento de voltaje continúa hasta que el núcleo se satura y el voltaje se estabiliza.

La auto-excitación se producirá en el generador si una de las raíces de su ecuación característica tiene parte real positiva. Las raíces del GIJA dependen de los parámetros de la máquina, del valor del capacitor conectado al estator y de la velocidad del rotor cuando está acoplado a un pri-motor externo. Por lo tanto, un paso importante para saber si existirá la auto-excitación o no, es determinar las raíces de la ecuación característica de las corrientes del GIJA. Sustituyendo (7) en (8), agrupando términos y reacomodando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} r_s+L_s p+\dfrac{1}{C_{qs}p} & 0 & L_M p & 0\\ 0 & r_s+L_s p+\dfrac{1}{C_{qs}p} & 0 & L_M p\\ L_M p & -\omega_r L_M & r_r'+L_r' p & -\omega_r L_r'\\ \omega_r L_M & L_M p & \omega_r L_r' & r_r'+L_r' p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{qs}\\ I_{ds}\\ I_{qr}'\\ I_{dr}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-V_{qsc0}\\ -V_{dsc0}\\ K_{qr}\\ -K_{dr}\end{bmatrix} \tag{12}$$

De (12) se puede obtener la ecuación característica para las corrientes I_s; de esta forma (12) se puede representar como:

$$ZI = -V$$

donde V es el vector formado por los voltajes de los capacitores y los voltajes iniciales inducidos; I es el vector de corrientes; Z es la matriz formada por los parámetros de la máquina y la velocidad del pri-motor. De aquí, apoyados en la regla de Cramer, despejando el vector de corrientes se obtiene:

$$I = -V_I / Z$$

donde V_I es la matriz formada al aplicar la regla de Cramer. Debido a que la ecuación característica está determinada solo por la matriz Z, sólo se desarrollará ésta; así, la ecuación característica para las corrientes I_s es de la forma:

$$A_6p^6 + A_5p^5 + A_4p^4 + A_3p^3 + A_2p^2 + A_1p + A_0 = 0 \qquad (13)$$

Los coeficientes $A_0, \ldots, A_6$ se encuentran definidos en el apéndice A.

La ecuación (13) es una ecuación de sexto orden, por lo cual existen seis raíces complejas diferentes dadas de la forma:

$$(p_1 - \sigma_1 + j\omega_1)(p_2 - \sigma_1 - j\omega_1)(p_3 - \sigma_2 + j\omega_2)(p_4 - \sigma_2 - j\omega_2)\ldots \qquad (14)$$
$$\ldots(p_5 - \sigma_3 + j\omega_3)(p_6 - \sigma_3 - j\omega_3)$$

Para que la máquina de inducción logre trabajar como generador, requiere de cierto valor mínimo de la velocidad del pri-motor y del capacitor conectado a las terminales del estator. Para conocer estos valores es necesario resolver las raíces del polinomio de sexto orden dado por (13) y ello se puede realizar por dos métodos:

1. Para un valor de capacitancia dada, se varía el valor de la velocidad del pri-motor y se obtienen las raíces de (13), en el valor de la velocidad en el cual una de las partes reales de las raíces cambia de negativa a positiva, esa será el valor de la velocidad mínima para que ocurra la auto-excitación.
2. Para un valor de velocidad del pri-motor dado, se varía el valor de la capacitancia y, el valor de la capacitancia que hace la parte real de una de las raíces positiva es el valor mínimo de capacitancia necesaria para que ocurra el proceso de auto-excitación.

5 Inductancia de Magnetización

La variación de la inductancia de magnetización es la razón principal para la generación de voltaje en el generador, ya que de ella depende la dinámica del aumento y estabilización del voltaje generado.

Si se utiliza el modelo de (8) junto con la *inductancia de magnetización* a voltaje promedio, el generador trabajaría en su zona lineal, lo cual haría que el voltaje generado tendiera a infinito, hecho que es imposible de obtener con cualquier máquina real; por ello es importante la variación de la *inductancia de magnetización* y el efecto de la saturación de la máquina de inducción para limitar el voltaje generado por el GIJA.

La variación de la inductancia de magnetización en la MI se muestra en la Fig. 3. Se puede observar que la inductancia de magnetización empieza en un valor determinado, aumenta hasta alcanzar un valor pico máximo y después comienza a disminuir. Esta variación con la ayuda de la saturación del núcleo de la máquina de inducción, es precisamente lo que hace posible que se obtenga un voltaje limitado en el capacitor de auto-excitación.

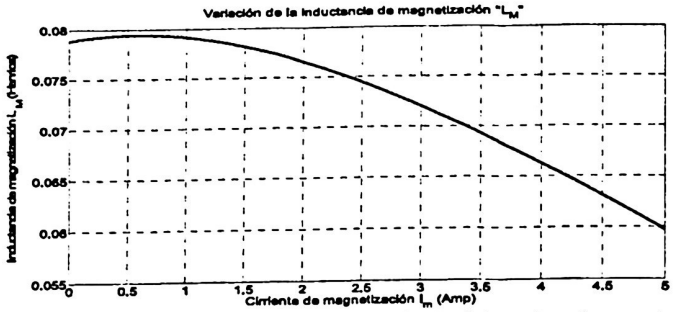


Fig. 3. Variación de la inductancia de magnetización en función de la corriente de magnetización.

6 Simulación del GIJA

Para encontrar el valor de los capacitores se aplicó el método 2, mencionado en la sección 4. Si la variación de la inductancia de magnetización no se toma en cuenta, el generador de inducción trabajará en su zona lineal y la corriente del estator y, por lo tanto, el voltaje generado crecerán sin control y tenderán al infinito.

La inductancia de magnetización puede ser aproximada de diferentes formas, en este trabajo se calcula en función de la corriente *rms* de magnetización I_m y ésta dada mediante el siguiente polinomio:

$$L_{Af} = -1.175e^{-5}I_m^4 + 1.353e^{-4}I_m^3 - 2.08e^{-3}I_m^2 + 2.183e^{-3}I_m + 7.88e^{-2} \quad (15)$$

En la Fig. 4 se muestra lo anteriormente mencionado. Los parámetros utilizados para la simulación del generador de inducción se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del generador de inducción jaula de ardilla.

Parámetro	Valor
R_s	0.5825 Ω
R_r	0.5032 Ω
X_{ls}	1.3184 Ω
X_{lr}	1.9776 Ω
N_p	2
ω_r	188.6 rad/sg
$C_{qs} = C_{ds}$	125 μF
R_L	30 Ω

Donde N_p es el número de pares de polos.

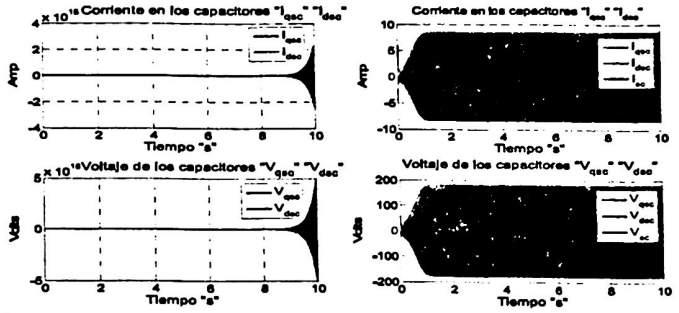


Fig. 4. Corriente y voltaje generado sin considerar y considerando la saturación de la máquina.

Para conectar una carga al generador de inducción, es recomendable que éste se encuentre en su estado estacionario, de lo contrario se corre el riesgo de que se pierda la excitación de la máquina y de perder el magnetismo residual de la máquina que ayuda al proceso de auto-excitación. Si esto llegase a ocurrir, existen tres formas de volver a excitar a la máquina de inducción:

1. Hacer trabajar a la máquina de inducción como motor por un breve periodo.
2. Conectar una batería a las terminales del estator de la máquina.
3. Cargar a los capacitores de auto-excitación y descargarlos en las terminales del estator.

6.1 Operación del GIJA con Carga Puramente Resistiva

En la Fig. 5, se observa la respuesta del generador cuando se le conecta una carga puramente resistiva de 30 Ω. Como la carga consume corriente, la corriente que circula por el capacitor ahora es menor y por lo tanto el voltaje generado también disminuye.

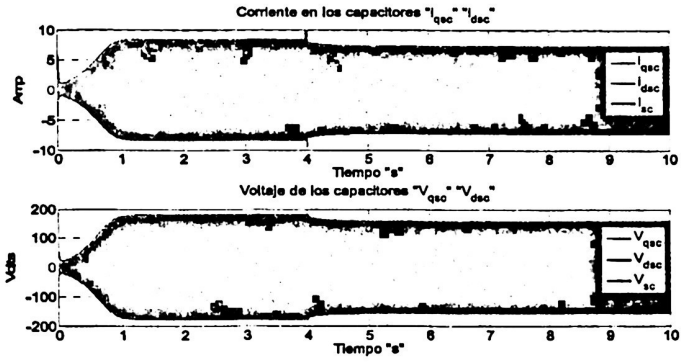


Fig. 5. Corriente y voltaje generado considerando la saturación de la máquina y conectando una carga puramente resistiva.

6.2 GIJA Alimentando un Motor de Inducción

El generador de inducción también puede alimentar cargas más complejas, como un motor de inducción. En la Tabla 2, se muestran los parámetros del motor de inducción utilizado.

Tabla 2. Parámetros del motor de inducción.

Parámetro	Valor
R_s	11 Ω
R_r	8.92 Ω
X_{ls}	13.2 Ω
X_{lr}	10 Ω
X_m	397 Ω
J	4.8195e-3 $Kgms^2$
τ_L	1.6 Nm

En la Fig. 6, se muestra la respuesta del generador de inducción cuando el motor se conecta a sus terminales en un tiempo t=4 seg., se puede observar una caída de corriente y voltaje y enseguida se estabiliza en un valor un poco menor que su voltaje generado sin carga.

También se puede observar otra variación en la corriente y en el voltaje, cuando en t=7 seg., se le conecta un par de carga mecánico al motor.

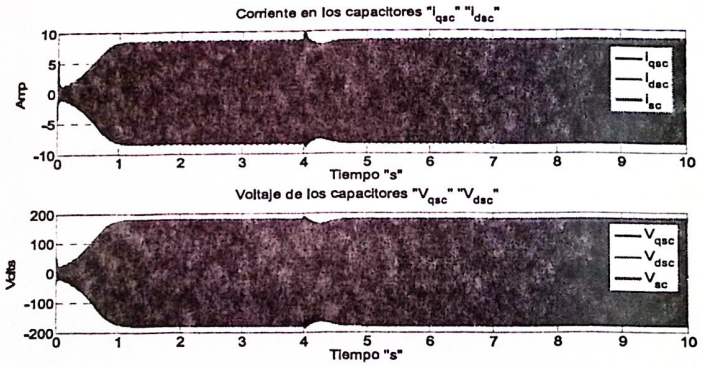


Fig. 6. Corriente y voltaje generado considerando la saturación de la máquina y conectando como carga un motor de inducción.

En las Fig. 7, se presenta la respuesta del motor de inducción, contiene las corrientes del estator y del rotor y en ellas se puede observar la variación de la corriente cuando el par de carga mecánico se conecta al eje del motor, además de la velocidad mecánica del eje del rotor, la cual es cercana a la velocidad síncrona, pero en cuanto la carga mecánica se conecta, la velocidad disminuye y se estabiliza en un nuevo valor por debajo de la velocidad síncrona.

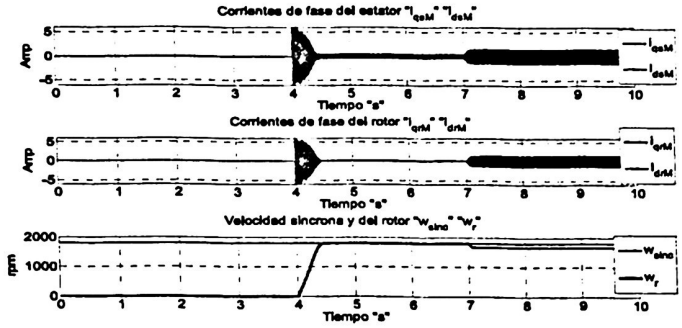


Fig. 7. Comportamiento del motor de inducción.

6.3 Aumento de Voltaje

Como se observó en las Fig. 5 y 6 siempre que una carga eléctrica se conecta al generador de inducción el voltaje disminuye. Una manera de aumentar el voltaje generado es incrementar la velocidad del pri-motor o incrementar el valor del capacitor conectado a la terminal del estator; en la Fig. 8, se muestran estos procedimientos para el aumento del voltaje generado; en ambos caso la velocidad y la capacitancia se incrementan en t=7 seg.

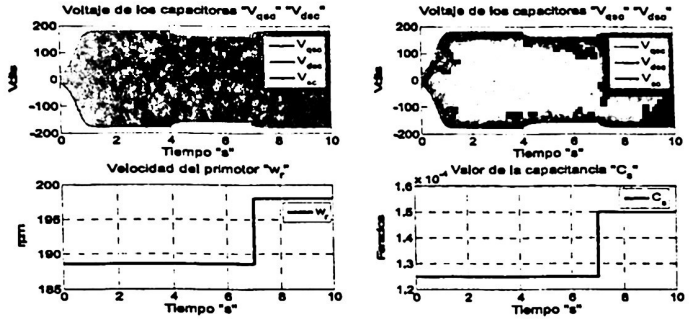


Fig. 5. Aumento del valor de la velocidad del pri-motor en un 5% y del valor de la capacitancia en un 20% en t=7 seg.

7 Conclusiones

En este trabajo se realizó la simulación de un GIJA para la generación de energía eléctrica manejado por medio de un pri-motor, el cual puede simular el funcionamiento de una planta de generación eoloeléctrica. Se presentó el modelo del generador de inducción tipo jaula de ardilla en el marco de referencia fijo al estator, el cual es capaz de describir la parte dinámica (proceso de auto-excitación) y la parte estacionaria de la respuesta del generador de inducción.

Se habló sobre la importancia de la inductancia de magnetización y la saturación de la máquina de inducción para poder lograr un funcionamiento real del generador de inducción y se relacionó la inductancia de magnetización en función de la corriente *rms* de magnetización.

Se mencionó un método sencillo para calcular el valor del capacitor de auto-excitación, sólo tomando en cuenta algunos parámetros de la máquina de inducción; además, se consideró el efecto de la conexión de una carga eléctrica a las terminales del generador de inducción sobre el voltaje generado, presentando una carga pasiva (resistiva) y una carga activa (motor de inducción), y se mostró que incrementando el valor de la velocidad del pri-motor o de la capacitancia de auto-excitación es posible compensar la caída de voltaje debido a la carga eléctrica conectada.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la DGEST por el apoyo financiero otorgado al proyecto *Confiabilidad, Modelado y Control en Sistemas de Generación y Conversión de la Energía*, con clave *610.07-P/2007*.

Referencias

1. Chapman S. J.: Máquinas Eléctricas. McGraw Hill. México (1987)
2. Krause P. C., Oleg W., Scout D. S.: Analysis of Electric Machinery and Drive Systems. IEEE Press Power Engineering Series, USA (2002)
3. Seyoum D.: The Dynamic of an Isolated Self-Excited Induction Generator Driven by a Wind Turbine. PhD thesis (2003).
4. Torres M. E.: Control de Voltaje del Generador de Inducción Auto-Excitado para Aplicaciones de micro-mini Generación de Energía Eólica. Tesis de maestría, México (2006).
5. Bhaskara P., Godoy M., Farret F. A.: Dynamic Simualtion and Analysis of Parallel Self-Excited Induction Generators for Islanded Wind Farm Systems. In IEEE Transactions on Industry Applications, pp. 1099-1106. IEEE (2005).
6. Nesba A., Ibtiouen R., Touhami O.: Dynamic Performances of Self-Excited Induction Generator Feeding Different Static Loads, pp. 63-76. Serbian Journal of Electrical Engineering (2006).

Apéndice A

$$A_0 = \omega_r^2 L_r'^2 + R_r'^2$$

$$A_1 = 2R_s C\left(\omega_r^2 L_r'^2 + R_r'^2\right) + 2R_r' L_r'$$

$$A_2 = 2L_s C\omega_r^2 L_r'^2 + 2L_s C R_r'^2 + \ldots$$
$$\ldots + R_s^2 C^2 \omega_r^2 L_r'^2 + R_s^2 C^2 R_r'^2 - \ldots$$
$$\ldots - 2\omega_r^2 L_M^2 L_r' C + 4R_s C R_r' L_r'$$

$$A_3 = 2C^2 R_s^2 R_r' L_r' + 2C^2 R_s L_s \omega_r'^2 L_r'^2 - \ldots$$
$$\ldots - 2C^2 R_s \omega_r'^2 L_M^2 L_r' + 2C^2 R_s L_s R_r'^2 + \ldots$$
$$\ldots + 2C\left(-L_M^2 R_r' + R_s L_r'^2 + 2L_s R_r' L_r'\right)$$

$$A_4 = C^2\begin{pmatrix} L_s^2\left(\omega_r^2 L_r'^2 + R_r'^2\right) + \omega_r^2 L_M^4 - \ldots \\ \ldots - 2L_s \omega_r'^2 L_M^2 L_r' - 2R_s L_M^2 R_r' + \ldots \\ \ldots + R_s^2 L_r'^2 + 4R_s L_s R_r' L_r' \end{pmatrix} + \ldots$$
$$\ldots + 2C\left(-L_M^2 L_r' + L_s L_r'^2\right)$$

$$A_5 = 2C^2\begin{pmatrix} -R_s L_M^2 L_r' - L_s L_M^2 R_r + \ldots \\ \ldots + R_s L_s L_r'^2 + L_s^2 R_r' L_r' \end{pmatrix}$$

$$A_6 = C^2\left(L_M^4 - 2L_s L_M^2 L_r' + L_s^2 L_r'^2\right)$$

Control de Robots I

Compensación adaptable de fricción dinámica en robots manipuladores

Juan C. Martínez-Rosas * y Luis Alvarez-Icaza **

Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacán DF, México

Resumen Se presenta un modelo novedoso para describir la fricción articular en un robot industrial. Este modelo es una extensión del modelo de fricción dinámica LuGre. El efecto Stribeck es modelado con una ecuación diferencial no lineal de primer orden. La principal ventaja de la nueva descripción radica en la posibilidad de identificar todos los parámetros relevantes de fricción en línea. La validez del esquema adaptable de compensación de fricción dinámica es verificada mediante resultados experimentales.
Palabras clave Modelos de fricción dinámica; Fricción de Coulomb; Efecto Stribeck; Modelo de fricción LuGre.

1. Introducción

La fricción dinámica es un fenómeno físico inevitable que tiene comportamientos no lineales complejos que deterioran el desempeño de servomecanismos de alta precisión. Para obtener una compensación adecuada de fricción, es importante contar con un modelo de fricción conveniente [9] que prediga la fricción real y comande una acción de control opuesta para una eficiente compensación [16,18]. Uno de los cambios más importantes en control orientado en modelos de fricción se enfoca a que estos sean tan simples como sea posible, para describir los fenómenos básicos que induce la fricción durante un movimiento [8]. Un paso importante en esta dirección es el modelo de fricción introducido en [2], donde los autores presentan un modelo dinámico de primer orden junto con una ecuación de salida para describir la fuerza de fricción en una región de contacto entre dos cuerpos. La principal ventaja de éste y otros modelos de fricción dinámica en la literatura [1] radica en su habilidad para reproducir un comportamiento de histéresis y el llamado "efecto Stribeck" que explica la transición de fricción estática a fricción dinámica. Se han realizado intentos para proponer esquemas de adaptación en línea para modelos de fricción dinámica. En [9,6,7,10,11] se

* Postdoctorado, jmartinezr@iingen.unam.mx
** Profesor y corresponsal, alvar@pumas.iingen.unam.mx
[1] Ver, por ejemplo, [1,3,4,5].

M.A. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 253-262

presentan esquemas para adaptar los parámetros del modelo de fricción dinámica introducidos en [2]. El número de parámetros sujetos a adaptación cambia en cada caso. pero en todos ellos, se tiene que asumir el conocimiento de algunos parámetros. En este artículo se propone un nuevo modelo de fricción dinámica que extiende al presentado en [2]. La principal diferencia en la nueva descripción con respecto a [2], es en la descripción del efecto Stribeck, el cual ahora es modelado con una ecuación diferencial no lineal de primer orden. La fricción de Coulomb y el comportamiento de histéresis son de igual manera modelados con una ecuación diferencial no lineal de primer orden. Esto tiene como resultado un modelo de fricción dinámico de segundo orden que intuitivamente preserva y reproduce un comportamiento de estado pseudo-estacionario y ofrece las mismas propiedades de entrada-salida del modelo previo. La principal ventaja de esta nueva representación con respecto a otros modelos de fricción dinámica radica en la posibilidad de identificar todos los parámetros relevantes que caracterizan la fricción.

2. Modelo de fricción dinámica

El modelo de fuerza de fricción dinámica tiene la siguiente estructura

$$F = \sigma_0 F_c z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q} + (F_s - F_c) y + \alpha \dot{y}, \tag{1}$$

donde $F_c > 0$ es el coeficiente de fricción de Coulomb, $F_s > 0$ es el coeficiente de fricción estática, $\sigma_i > 0; i = 0, 1, 2$ son constantes que pueden ser interpretadas como parámetros de rigidez o amortiguamiento viscoso. En este modelo z y y son los estados internos del modelo de fricción, el estado z está relacionado con la fricción de Coulomb y el estado y se relaciona con el efecto Stribeck. La dinámica de z y y esta dada por

$$\dot{z} = \dot{q} - \sigma_0 |\dot{q}| z, \tag{2}$$

$$\dot{y} = -y + \mathrm{sign}(\dot{q}) \mathrm{e}^{-n|\dot{q}|^m}, \tag{3}$$

donde $\dot{q}$ es la velocidad relativa de las superficies en contacto, m es una cantidad conocida[2], $\alpha > 0$ es una constante y $n = |1/\dot{q}_s|^m$, con $\dot{q}_s$ es la velocidad Stribeck. La ecuación (1) presenta ligeras modificaciones con respecto al modelo presentado en [8]. La ecuación (3), y los términos $(F_s - F_c)y$ y $\dot{y}$ en (1) representan el proceso transitorio en el deslizamiento de la unión de contacto que va desde un estado de máxima deflexion sin deslizamiento a un estado de deslizamiento completo. Este proceso transitorio está detrás del efecto Stribeck. Sustituyendo (2) y (3) en (1) se obtiene

$$F = \sigma_0 F_c z + \sigma_1 \dot{q} - \sigma_0 \sigma_1 |\dot{q}| z + \sigma_2 \dot{q} + (F_s - F_c) y + \alpha \left[-y + \mathrm{sign}(\dot{q}) \mathrm{e}^{-n|\dot{q}|^m} \right]. \tag{4}$$

[2] La literatura se refiere al uso de $m = 1/2$ o $m = 2$.

Para calcular la respuesta en estado pseudo-estacionario, se fija $\dot{q}$ y se coloca $\dot{z} = 0$ y $\dot{y} = 0$, entonces el equilibrio para (2) y (3) es

$$\bar{z} = \frac{1}{\sigma_0} sign(\dot{q}), \qquad \bar{y} = sign(\dot{q}) \mathrm{e}^{-n|\dot{q}|^m}. \tag{5}$$

La sustitución de (5) en (4) con $\dot{z} = 0$ y $\dot{y} = 0$ resulta en

$$F = F_c \; sign(\dot{q}) + (F_s - F_c) sign(\dot{q}) \; \mathrm{e}^{-n|\dot{q}|^m} + \sigma_1 \dot{q}, \tag{6}$$

lo cual coincide con la solución en estado estacionario presentada en [2].

3. Propiedades de Pasividad

Las propiedades de pasividad del modelo de fricción en (1)-(3) son establecidas por

Proposition 1. *Si $F_s \geq F_c$, el sistema dinámico en* (1)-(3) *define un operador estrictamente pasivo $\Sigma : \mathcal{L}_{2e} \rightarrow \mathcal{L}_{2e} : \dot{q} \rightarrow F$, esto es, a lo largo de las soluciones de* (1)-(3) *con condiciones iniciales cero, es decir $I(0,T) = \int_0^T \dot{q} F dt > 0$.*

Prueba

$$I(0,T) = \int_0^T \dot{q} F dt = \int_0^T (\sigma_0 F_c z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q} + (F_s - F_c) y + \alpha \dot{y}) \dot{q} \, dt. \tag{7}$$

que puede ser descompuesto como $I(0,T) = I_1(0,T) + I_2(0,T) + I_3(0,T) + I_4(0,T)$.
Donde $I_1(0,T) = \int_0^T (\sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q}) \, \dot{q} \, dt$, $I_2(0,T) = \sigma_0 F_c \int_0^T z \dot{q} \, dt$, $I_3(0,T) = \alpha \int_0^T \dot{y} \dot{q} \, dt$, $I_4(0,T) = (F_s - F_c) \int_0^T y \dot{q} \, dt$.
Si las condiciones iniciales satisfacen $z(0) = y(0) = 0$, entonces es posible acotar z y y mediante

$$|z| \leq \frac{1}{\sigma_0}, \qquad |y| \leq \mathrm{e}^{-n|\dot{q}|^m}. \tag{8}$$

Tomando ahora $I_1(0,T)$, sustituyendo (2) y usando (8) se consigue

$$I_1(0,T) = \int_0^T (\sigma_1 \dot{q} - \sigma_0 \sigma_1 |\dot{q}| z + \sigma_2 \dot{q}) \, \dot{q} \, dt \geq \int_0^T (-\sigma_1 + \sigma_1 + \sigma_2) \, \dot{q}^2 \, dt > 0. \tag{9}$$

Para $I_2(0,T)$, usando $z(0) = 0$, (2) y (8) obtiene

$$I_2(0,T) = \sigma_0 F_c \int_0^T z \, (\dot{z} - \sigma_0 |\dot{q}| z) \, dt = \frac{\sigma_0 F_c}{2} z^2(T) + {\sigma_0}^2 F_c \int_0^T z^2 |\dot{q}| > 0. \tag{10}$$

Para el caso de $I_3(0,T)$, se toma (3) y (8) para obtener

$$I_3(0,T) = \alpha \int_0^T \left(-y + \mathrm{sign}(\dot{q}) \mathrm{e}^{-n|\dot{q}|^m} \right) \dot{q} \, dt \geq \alpha \int_0^T (-\dot{q} + |\dot{q}|) \, \mathrm{e}^{-n|\dot{q}|^m} \, dt \geq 0. \tag{11}$$

Finalmente, para $I_4(0,T)$, se considera primero el caso para $\dot{q} \neq 0$, entonces se usa (3) para conseguir $\dot{q} = \frac{\dot{y}+y}{e^{-n|\dot{q}|^m}}|\dot{q}|$ Sustituyendo esto en $I_4(0,T)$, usando (8) y $y(0) = 0$ se consigue

$$I_4(0,T) = (F_s - F_c)\int_0^T \frac{\dot{y}+y}{e^{-n|\dot{q}|^m}} y|\dot{q}|\,dt \geq (F_s - F_c)\left\{\int_0^T y\dot{y}|\dot{q}|\,dt + \int_0^T y^2|\dot{q}|\,dt\right\}$$
$$\geq (F_s - F_c)\left\{|\dot{q}_{min}|y(T)^2 + \int_0^T y^2|\dot{q}|\,dt\right\} \geq 0,$$

con $|\dot{q}| \leq |\dot{q}_{min}|$ donde $\dot{q} \neq 0$ y asumiendo que $F_s \geq F_c$. El otro caso, $\dot{q} = 0$, implica directamente $I_4(0,T) = 0$. Finalmente si $F_s \geq F_c \Rightarrow I(0,T) = I_1(0,T) + I_2(0,T) + I_3(0,T) + I_4(0,T) > 0$. Esta prueba ha usado la estructura presentada en [12].

4. Esquema de identificación

En esta sección se presenta una estructura para propósitos de identificación. Asumiendo el conocimiento del parámetro n, lo que implica que la velocidad Stribeck también es conocida[3] se puede escribir la fuerza con una estructura lineal en los parámetros como

$$F = U_1 P_1, \tag{12}$$

donde

$$U_1 = [z, -|\dot{q}|z, \dot{q}, y, \dot{y}]\,,\; P_1 = [\sigma_0 F_c, \sigma_0\sigma_1, \sigma_1 + \sigma_2, F_s - F_c, \alpha]\,. \tag{13}$$

5. Control adaptable de robots con fricción dinámica

En esta sección es diseñado un controlador adaptable para robots manipuladores con compensación de fricción dinámica. La dinámica de un robot manipulador de n-grados de libertad [15] es descrita mediante.

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{F}, \tag{14}$$

donde $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas articulares generalizadas, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de inercia simétrica positiva definida, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerza gravitacional, $\boldsymbol{F} = [F_1 \ldots, F_n] \in \mathbb{R}^n$ son las fuerzas de fricción actuando de manera independiente en cada articulación[4], cada uno de ellos estructurado de acuerdo a (12), $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares actuando en las articulaciones. El modelo del robot (14) tiene las siguientes propiedades bien conocidas [14]:

- 1)Existen constantes positivas μ_1 y μ_2 tales que $\mu_1 \boldsymbol{I}_n \leq \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \leq \mu_2 \boldsymbol{I}_n$.

[3] Esta suposición puede ser fácilmente relajada, tal como se muestra en [8]

[4] $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{P}_1$ es el vector formado por (12).

- 2) La matriz $\dot{H}(q) - 2C(q,\dot{q})$ es anti-simétrica.
- 3) $C(q,x)y = C(q,y)x$.
- 4) El modelo del robot (14) puede ser parametrizado como $H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + F = U_2(q,\dot{q},\ddot{q})P_2$,

donde $P_2 \in \mathbb{R}^l$ contiene los parámetros desconocidos del manipulador y la matriz del regresor $U_2(q,\dot{q},\ddot{q})$ contiene las funciones conocidas. Considerando que los estados en (2) y (3) no pueden ser medidos y por consiguiente deben de ser estimados. El siguiente observador adaptable es propuesto para estimar z, y y los parámetros del modelo $P = [P_1, P_2]^T$, usando el regresor $U = [U_1, U_2]$

$$\dot{\hat{z}} = \dot{q} - \hat{\sigma_0}\,|\dot{q}|\hat{z}, \tag{15a}$$

$$\dot{\hat{y}} = -\hat{y} + sign(\dot{q})e^{-n|\dot{q}|^m}, \tag{15b}$$

$$\dot{\hat{P}} = -\Gamma\hat{U}^T s, \tag{15c}$$

donde $\hat{\bullet}$ denota el estimado de $\bullet$, con la excepción de $\hat{U} = [\hat{U_1}, U_2]$, $\Gamma = \Gamma^T > 0$ es una matriz [5]. Definiendo las siguientes señales de error $\tilde{z} = \hat{z} - z$, $\tilde{y} = \hat{y} - y$, $\tilde{P} = \hat{P} - P$, $\tilde{F} = \hat{F} - F$ como el error de fricción y s se define posteriormente. Para diseñar la ley de control, se considera el modelo (14) y define el error de seguimiento dado por $\tilde{q} \triangleq q - q_{\mathrm{di}}$, donde q_{di} es una trayectoria deseada acotada suave. Otras definiciones son $\dot{q}_{\mathrm{r}} = \dot{q}_{\mathrm{di}} - \Lambda\tilde{q}$ y $s = \dot{q} - \dot{q}_{\mathrm{r}}$, donde $\Lambda_i = k_i I \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ con $k_i > 0$. El controlador propuesto está entonces dado por

$$\tau = \hat{H}(q)\ddot{q}_{\mathrm{r}} + \hat{C}(q,\dot{q}_{\mathrm{r}})\dot{q}_{\mathrm{r}} + \hat{g}(q) + \hat{F} - K_{\mathrm{D}}s, \tag{16}$$

donde $K_{\mathrm{D}} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ es una matriz diagonal positiva definida.

Proposition 2. *Considere el sistema dinámico* (14), *el observador adaptable* (15) *y la ley de control* (16) *entonces el error de seguimiento* $\tilde{q}$, *los errores de observación* $\tilde{z}$, $\tilde{y}$ *y las señales* s, $\hat{U}\tilde{P}$ *tenderán asintóticamente a cero.*

Prueba Si el sistema dinámico de error esta dado por

$$\dot{\tilde{z}} = -|\dot{q}|\tilde{z}, \tag{17a}$$

$$\dot{\tilde{y}} = -\tilde{y} \tag{17b}$$

$$\begin{aligned}\hat{U}\hat{P} - UP &= \hat{U}_1\hat{P}_1 - U_1P_1 + U_2\tilde{P}_2 \\ &= \hat{U}_1\tilde{P}_1 + \tilde{U}_1P_1 + U_2\tilde{P}_2.\end{aligned} \tag{17c}$$

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}s^T H(q)s + \frac{1}{2}\tilde{P}^T\Gamma^{-1}\tilde{P} + \frac{\gamma_1}{2}\tilde{z}^2 + \frac{\gamma_2}{2}\tilde{y}^2, \tag{18}$$

[5] Notar que ha sido introducido un ligero cambio en la manipulación del coeficiente α el cual no cambia las propiedades del modelo

con $\gamma_i > 0$ una ganancia escalar. El siguiente paso es calcular la derivada de la función candidata de Lyapunov en (18) a lo largo de (17), la cual puede ser mostrada para satisfacer

$$\dot{V} = s^T H(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{H}(q)s + \gamma_1 \tilde{z}\,\dot{\tilde{z}} + \gamma_2 \tilde{y}\,\dot{\tilde{y}} + \dot{\tilde{P}}^T \Gamma^{-1}\dot{\tilde{P}}. \tag{19}$$

Después de sustituir la ley de control propuesta (16) en (19), con $\dot{s} = \ddot{q} - \ddot{q}_r$, usando las propiedades 2 y 3 y realizando algunas manipulaciones, es posible obtener

$$\dot{V} = -\tilde{P}^T \hat{U}^T \hat{U}\tilde{P} + s^T \tilde{U}_1 P_1 + \gamma_1 \tilde{z}\,\dot{\tilde{z}} + \gamma_2 \tilde{y}\,\dot{\tilde{y}} - s^T K_D s, \tag{20}$$

donde los términos $\tilde{U}_1 P_1$ en (20) pueden ser descompuestos como

$$\tilde{U}_1 P_1 = [p_{1_1} - p_{1_2}|\dot{q}|]\tilde{z} + [p_{1_4} - p_{1_5}]\tilde{y} = v_1\tilde{z} + v_2\tilde{y}. \tag{21}$$

La sustitución de (21) dentro de (20) lleva a

$$\dot{V} = -\tilde{P}^T \hat{U}^T \hat{U}\tilde{P}s^T v_1\tilde{z} + s^T v_2\tilde{y} + \gamma_1 \tilde{z}\,\dot{\tilde{z}} + \gamma_2 \tilde{y}\,\dot{\tilde{y}} - s^T K_D s, \tag{22}$$

realizando manipulaciones en (22) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq\ & |v_1|\|s\|\|\tilde{z}\| + |v_2|\|s\|\|\tilde{y}\| - \gamma_1\|\tilde{z}\|^2 \\ & - \gamma_2\|\tilde{y}\|^2 - k_D\|s\|^2 - \tilde{P}^T\hat{U}^T\hat{U}\tilde{P}.\end{aligned} \tag{23}$$

con k_D como el mínimo valor propio de K_D. El siguiente paso es seleccionar las ganancias para garantizar que $\dot{V} \leq 0$. Es posible proponer $k_D = 2 + \delta$, $\gamma_2 = \frac{1}{4}v_2^2 + \delta$ y $\gamma_1 = \frac{1}{4}v_1^2 + \delta$ para completar la función cuadrada, con $\delta > 0$. Así, (23) llega a ser negativa semidefinida, i.e,

$$\dot{V} \leq -\delta\|s\|^2 - \delta\|\tilde{y}\|^2 - \delta\|\tilde{z}\|^2 - \tilde{P}^T\hat{U}^T\hat{U}\tilde{P} \leq 0. \tag{24}$$

Usando el Lema de Barbalat [13] es posible demostrar que conforme $t \to \infty$

$$\tilde{z} \to 0,\ \tilde{y} \to 0,\ s \to 0, \hat{U}\tilde{P} \to 0$$

6. Resultados experimentales

Se llevaron a cabo los experimentos para demostrar el desempeño del modelo de fricción dinámica aquí presentado. Para tal propósito se utilizó un robot industrial (ver Fig. 2(a)) que se encuentra en el Laboratorio de Robótica de la Universidad Nacional Autónoma de México. El robot es el A465 de *CRS Robotics*. El esquema de control ha sido programado en una computadora Pentium IV, con un tiempo de muestreo de $8\,ms$. Únicamente las tres primeras tres articulaciones del robot se usaron para los experimentos. Cada articulación es

actuada mediante un motor de CD. Para implementar la ley de control (16), los pares fueron convertidos a voltajes mediante el uso de constantes apropiadas [17]. Se llevaron a cabo dos experimentos para probar la compensación dinámica de fricción. La primera tarea consistió en el seguimiento de una trayectoria deseada y la segunda en regular una posición fija en el espacio articular. Para propósitos de comparación, cada experimento adaptable se realizó con y sin compensación dinámica de fricción. La trayectoria utilizada para seguimiento está dada por

$$q_{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} ((k_1 + k_2)\sin(fw_1 t))(1 - e^{K_{e1}t^3}) \\ ((k_3 + k_4)\sin(fw_2 t))(1 - e^{K_{e2}t^3}) \\ ((k_5 + k_6)\sin(fw_3 t))(1 - e^{K_{e3}t^3}) \end{bmatrix} \tag{25}$$

con $k_1 = 0, k_2 = ,174, k_3 = 0, k_4 = ,174, k_5 = 0{,}349, k_6 = -0{,}261, k_e1 = k_e2 = k_e3 = 0{,}1, fw_1 = fw_2 = fw_3 = 0{,}5, \Lambda = diag\{35, 35, 35\}, K_{\mathrm{D}} = diag\{30, 30, 30\}$. Para el caso de regulación la selección fue $q_{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) = [0{,}03, 0{,}03, 0{,}03]^{\mathrm{T}}$. Las Figs. 1(a) y 2(b) ilustran las trayectorias deseadas. Las Fig. 1(a) y 2(c) muestran los errores de seguimiento en ambos casos en las tres articulaciones del robot. La Fig. 2(c) incluye una comparación de la compensación de fricción usando el modelo original de LuGre [2]. Se puede observar que los errores de seguimiento con compensación de fricción son reducidos significativamente en ambos casos, superando al controlador sin adaptación de fricción y el modelo en [2]. Las Figs. 2(e) y 2(f) muestran la evolución en el tiempo de los parámetros de fricción estimados. Las Figs. 1(b) y 2(d) muestran la estimación de los estados de fricción internos $\hat{z}$ y $\hat{y}$ cuando la fricción adaptable está activa. Los resultados experimentales confirman el buen comportamiento del esquema adaptable propuesto. Esto es particularmente notable para la tarea de regulación, donde claramente la trayectoria deseada no tiene excitación persistente.

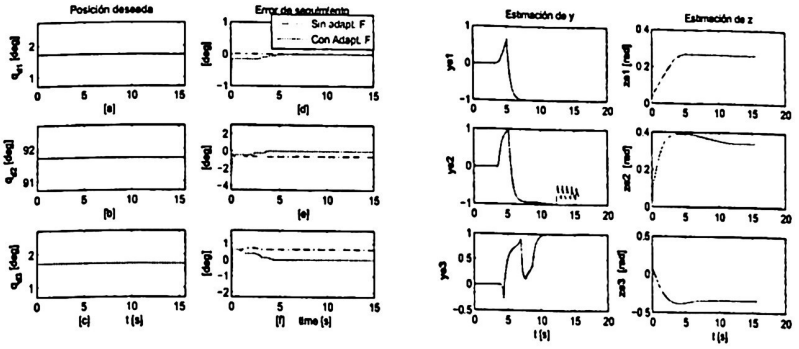


Figura 1. Resultados experimentales para regulación. a) Posición deseada y errores de seguimiento, b) Estimado de y y z

Cuadro 1. Resultados comparativos de los experimentos de seguimiento

Controlador	Promedio $\mathcal{L}[\tilde{q}] = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \|\tilde{q}\|^2 dt}$
$\ldots + \bar{F} - K_{DS}$	0.1681 [deg]
$\ldots - K_{DS}$	1.0413 [deg]
$\ldots + \bar{F}_{Lugre} - K_{DS}$	0.9366 [deg]

El Cuadro 1 muestra la raíz cuadrática media –RMS– de la norma euclidiana truncada para el error de posición durante un tiempo T obtenidos en los experimentos. Como puede apreciarse, los resultados mostrados con adaptación de fricción superan con amplio margen a los resultados obtenidos sin adaptación de fricción y a los obtenidos con el modelo Lugre.

7. Conclusiones

Es presentado un modelo novedoso de fricción dinámica para compensación de fricción articular en robots industriales. La principal diferencia en el modelo aquí presentado con respecto a [2], radica en la descripción del efecto Stribeck, el cual ahora es modelado con una ecuación diferencial no lineal de primer orden. El modelo resultante es un modelo de fricción dinámico de segundo orden que reproduce el comportamiento de estado pseudo-estacionario y ofrece las mismas propiedades de entrada-salida del modelo original. La principal ventaja de esta nueva representación con respecto a otros modelos de fricción dinámica se centra en la posibilidad de identificar todos los parámetros relevantes de fricción en tiempo real mediante el uso de algoritmos de adaptación de parámetros estándar. Esto es particularmente importante para aplicaciones de control de fricción en tiempo real, donde los parámetros cambian con el tiempo debido a factores externos o variaciones en las condiciones de operación. Se llevaron a cabo experimentos en un robot comercial para probar el enfoque propuesto. Los resultados confirman la factibilidad de operación en línea de este esquema de compensación de fricción dinámica. Los resultados experimentales obtenidos pueden ser considerados muy buenos en seguimiento y regulación.

8. Agradecimientos

Investigación patrocinada mediante convenio CONACYT 47583 y UNAM-DGAPA-PAPIIT IN117108. El primer autor también agradece por las facilidades y apoyo del Laboratorio de Robótica del Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y al Consejo Técnico de la Investigación Científica de la UNAM.

Referencias

1. B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. Canudas, "A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction," *Automatica*, vol. 30, no. 7, pp. 1083–1138, 1994.

2. Canudas de Wit, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., and Lischinsky, P., "A new model for control of systems with friction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp. 419–425, 1995.
3. Y. Wen, "Method for random vibration of hysteretic systems," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 102, no. EM2, pp. 249–263, 1976.
4. Choi, S.B., Lee, S.K., Rakheja, S., and Sun, C.Y., "A hysteresis model for the field-dependent damping force of a magnetorheological damper," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 2, no. 245, pp. 375–383, 2001.
5. Sain, M.P., Sain, M.K., and Spencer, B.F., "Models for hysteresis and application to structural control," in *Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico*, 1997, pp. 16–20.
6. C. Canudas and R. Horowitz, "Observers for tire/road contact friction using only whell angular velocity information," in *Proceedings of the 1999 Conference on Decision and Control*, 1999, pp. 3932–3937.
7. J. Yi, L. Alvarez, X. Claeys, and R. Horowitz, "Tire/road friction estimation and emergency braking control using dynamic friction model," 2002, accepted for publication on Vehicle System Dynamics.
8. L. Alvarez-Icaza and R. Jiménez-Fabián, *An identificable control-oriented dynamic friction model 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pp. 419–426, 2007.
9. Canudas de Wit, C. and Lischinsky, P., "Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 11, pp. 65–80, 1997.
10. J. Yi, L. Alvarez, and R. Horowitz, "Adaptive emergency braking control with underestimation of friction coefficient," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, pp. 381–392, 2002.
11. J. Yi, L. Alvarez, R. Horowitz, and X. Claeys, "Emergency braking control with an observed-based dynamic tire/road friction model and wheel angular velocity measurement," *Journal of Vehicle Systems Dynamics*, vol. 39, no. 2, pp. 81–97, 2003.
12. N. Barabanov and R. Ortega, "Necessary and sufficient conditions for passivity of the LuGre friction model," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 4, pp. 830–832, 2000.
13. H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed. USA: Prentice-Hall, 1996.
14. M. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, Wiley, New York 1989.
15. E. Panteley and R. Ortega and M. Gäfvert, *An adaptive friction compensator for global tracking in robot manipulators System and Control Letters.*, vol. 33, pp. 307–313, 1998.
16. J. Moreno and R. Kelly and R. Campa, *On velocity control using friction compensation Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, Nevada USA*, pp. 95–100, 2002.
17. J. Gudiño-Lau and M. A. Arteaga, *Dynamic model and simulation of cooperative robots: a case study Robotica*, vol. 23, pp. 615–624, 2005.
18. J. C. Martínez-Rosas and M. A. Arteaga and L. R. Sagredo, *Caracterización de fricción en los robots industriales CRS: A465 y A255 Congreso Nacional de la AMCA, México*, 2005.

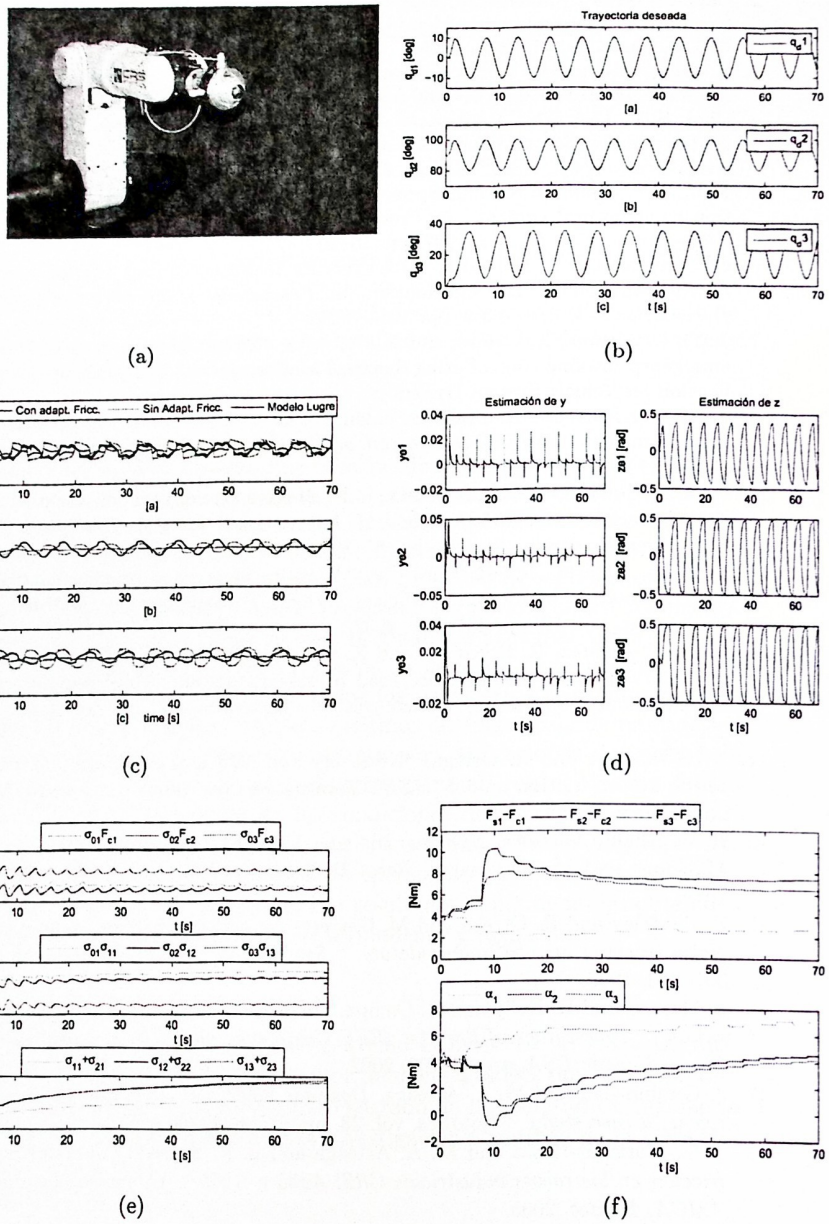


Figura 2. Resultados experimentales para seguimiento. a) Robot CRS A465, b) Trayectorias deseadas, c) Errores de seguimiento, d) Estimado de y y z, d) Estimado de los parámetros de fricción $[\sigma_{0i}F_{ci}, {\sigma_{0i}}^2, \sigma_{0i}+\sigma_{2i}]^T$ e) Estimado de parámetros de fricción $[F_{si}-F_{ci}, \alpha_i]^T$.

Aplicación de un Control No Lineal Basado en Pasividad a una Mano Robot

Cornelio Morales Morales, Marco A. Oliver Salazar

Departamento de Ingeniería Electrónica, CENIDET
Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, 62490, Cuernavaca, Morelos, México.
moliver@cenidet.edu.mx, cornelio@cenidet.edu.mx

Resumen: Este artículo propone el uso de un controlador no lineal basado en pasividad para controlar las posiciones de los dedos de una mano robótica denominada mano CENIDET. Para fines de comparación también se usaron controladores convencionales tipo PID y proporcional con compensación de gravedad (PD+G). Estas comparaciones no solo se realizaron a nivel simulación sino en forma experimental usando el prototipo de la mano CENIDET, donde se buscó emular los movimientos de una mano humana. Se usó el error cuadrático medio (ECM) como figura de mérito en la comparación. Se presenta en la sección dos el modelado cinemático y dinámico, mientras que en la sección tres se diseñan los controladores mencionados. En la sección cuatro se presenta los resultados obtenidos y la sección cinco presenta las principales conclusiones.

Palabras clave: Control no lineal, Pasividad, Modelo dinámico, Posición, Euler-Lagrange, Mano Cenidet.

1 Introducción

El problema de control de posición y trayectorias en robots manipuladores es bien conocido en el campo de la robótica. La mano robot CENIDET es un caso particular, desarrollada para reproducir algunos movimientos de la mano humana. Está constituido de 4 dedos con 4 grados de libertad cada uno. Para controlar las posiciones de los dedos se proponen controladores convencionales para comparar su desempeño con un controlador no lineal basado en pasividad, buscando obtener una congruencia entre las respuestas tanto de simulación como de experimentación.

Algunos de los controladores más estudiados aplicados a manipuladores son el control PID [1] y PD con compensación de gravedad (PD+G) [2]. En esta aplicación se desarrolla alternativamente un controlador basado en pasividad para ser aplicado a la mano CENIDET y obtener así información sobre su desempeño comparado con los otros dos controladores convencionales [3].

La principal motivación para la selección del controlador basado en pasividad se relaciona con las ventajas que éste presenta en términos de un manejo comparativamente más eficiente de la energía aplicada al sistema a controlar. El concepto de pasividad está relacionado con el de disipatividad, la cual fue tratada por

M.A. Moreno, C.A.Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 263-273

Willems [4] dentro de los sistemas disipativos. A su vez, las aportaciones realizadas por Hill [5]-[6] constituyeron también un enfoque general sobre condiciones de estabilidad en sistemas interconectados retroalimentados. Por otra parte Byrnes et al [7] abordó la equivalencia de sistemas pasivos no lineales con un enfoque geométrico.

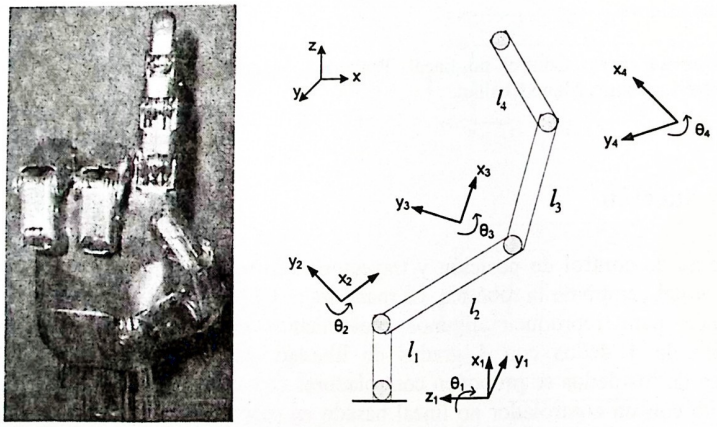
El desarrollo inicial del control basado en pasividad estuvo enfocado dentro del contexto de sistemas Hamiltonianos, con aplicaciones a sistemas manipuladores robóticos por Takegaki y Arimoto [13] y Slotine y Lie [14]).

El diseño del controlador por pasividad para la mano CENIDET mostrada en la figura (1a) [9], busca obtener mayor información sobre su comportamiento dinámico. Por lo que en este artículo se presenta en un inicio la metodología de modelado matemático (cinemático y dinámico), posteriormente se presentan los controladores convencionales y el controlador no lineal por pasividad para esta aplicación.

La metodología empleada para la obtención del modelado cinemático directo de la mano CENIDET se basa en la convención de Denavit-Hartenberg [11] y para el modelado dinámico se usa el formalismo de Euler-Lagrange [12]-[13]. Las consideraciones realizadas a cada modelado estuvieron fundamentadas en los movimientos de flexión, extensión, abducción y aducción de una mano.

También para la aplicación del controlador basado en pasividad al prototipo de mano CENIDET se retomó el controlador propuesto por Paden y Panja [14].

Cada simulación y validación experimental de los controladores fueron hechas usando Matlab 7.1 y LabView 7.1, mostrando los resultados correspondientes.



(a) (b)

Fig. 1. Mano CENIDET

2 Modelo Matemático

2.1 Modelo cinemático directo

El problema El problema cinemático directo se abordó usando la convención Denavit-Hartenberg (D-H). De la figura 1b se determinaron los parámetros D-H (ver tabla 1) útiles para las matrices de transformación homogéneas, expresadas en la ecuación 1.

$$T={}^{0}A_{1}\,{}^{1}A_{2}\,{}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4} \tag{1}$$

Tabla 1. Parametros Denavit-Hartenberg

Eslabón	θ_i	α_i	l_i	d_i
1	θ_1	90	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0
3	θ_3	0	l_3	0
4	θ_4	0	l_4	0

Sustituyendo los parámetros D-H en la ecuación 1 y resolviéndolas, se obtienen las coordenadas de posición,

$$\begin{aligned} p_x &= l_4c_1c_{234}+l_3c_1c_{23}+l_2c_1c_2+l_1c_1 \\ p_y &= l_4s_1c_{234}+l_3s_1c_{23}+l_2s_1c_2+l_1s_1 \\ p_z &= l_4s_{234}+l_3s_{23}+l_2s_2 \end{aligned} \tag{2}$$

donde: $c_i=\cos(\theta_i)$ y $s_i=sen(\theta_i)$.

2.2 Modelo dinámico

El modelo dinámico para robots manipuladores normalmente tiene la siguiente representación:

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=\tau \tag{3}$$

donde: $D(q)\in\Re^{n\times n}$ es la matriz de inercias, $C(q)\in\Re^{n\times n}$ representa la matriz de fuerzas Centrifugas y de Coriolis, $G(q)\in\Re^{n}$ es el vector de fuerzas gravitacionales y $\tau\in\Re^{n}$ es el vector de pares de entrada.

Adicionalmente, se usan las siguientes ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (E-L), donde cada dedo es considerado como un manipulador independiente:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}L(q,\dot{q})\right]-\frac{\partial}{\partial q_i}L(q,\dot{q})=\tau_i \tag{4}$$

Para conformar la ecuación 4 es necesario encontrar el Lagrangiano, L, que es la diferencia entre la energía cinética total, $K(q,\dot{q})$, y la energía potencial total, $U(q)$. Es decir:

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - U(q) \tag{5}$$

3 Diseño de controladores

3.1 Controladores convencionales

- **Controlador PID**

La ley de control PID simplificada es:

$$\tau = K_p e + K_v \dot{e} + K_i \xi \tag{6}$$

donde: $K_p, K_i, K_v \in \Re^{nxn}$ son las matrices de ganancias proporcional, integral y derivativa, respectivamente (simétricas y definidas positivas).

- **Controlador PD+G**

Este controlador satisface el objetivo de control de posición pura en forma global para robots de n grados de libertad, seleccionando las matrices de diseño K_p y K_v como simétricas y definidas positivas. Para este controlador se requiere conocer parte del modelo dinámico del sistema a controlar, que es el vector de pares gravitacionales $G(q)$.

$$\tau = K_p e + K_v \dot{e} + G(q) \tag{7}$$

donde: $K_p, K_v, K_i \in \Re^{nxn}$ son matrices definidas positivas y $G(q)$ es el término de gravedad.

3.2 Control No Lineal Basado en Pasividad (CBP)

Identificando que el problema de control es por naturaleza no lineal. El control basado en pasividad trata el problema de control mediante el moldeo de energía del sistema robótico.

El esquema de Takegaki y Arimoto consiste en una ley de control de posición, retroalimentando para ello la posición y las fuerzas gravitacionales para entonces añadir fuerzas articulares que conlleven a un mínimo en el error entre la posición deseada y la real. Esto se consigue adicionando amortiguamiento. Es decir:

$$\tau = g(q) - K_p e + v \tag{8}$$

donde: $v = -K_d \dot{e}$ es una nueva entrada de control.

Tomando la ley de control de Paden y Panja (que es una modificación de (8) donde se emplean los conceptos de energía cinética y energía potencial) se tiene:

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q,\dot{q})\dot{q}_d - K_p e + v \tag{9}$$

donde $v = -K_d e$.

4 Resultados

4.1 Espacio de trabajo

La representación del espacio de trabajo de la mano CENIDET usando (2) y los parámetros de [10] es:

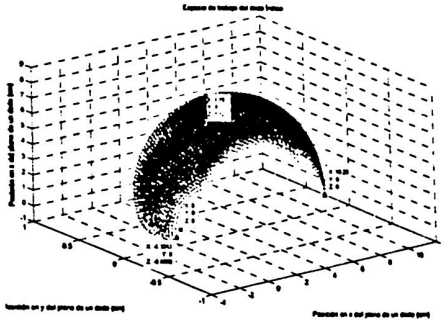


Fig. 2. Espacio de trabajo del dedo índice.

Los valores extremos en ese espacio de trabajo son: (10.23, 0, 0), (-0.3053, 0, -0.5008) y (1.76, 0,6.521); y los ángulos correspondientes para cada falange son: ($\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4=0°$), ($\theta_1=0°$, $\theta_2=45°$, $\theta_3=55°$, $\theta_4=35°$), y ($\theta_1=0°$, $\theta_2=90°$, $\theta_3=110°$, $\theta_4=70°$).

4.2 Control de Posición

Se busca comparar los 3 tipos de controladores (PID, PD+G y CBP) para el control de una posición deseada para cada una de las falanges de un dedo de la mano CENIDET.

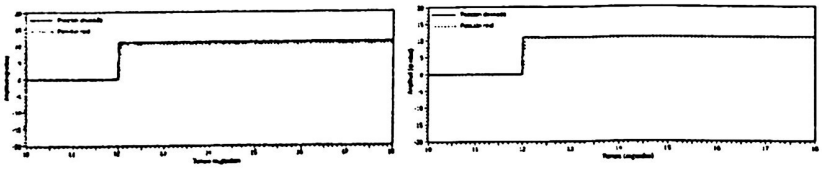
Se presentan las pruebas realizadas tanto en simulación como en experimentación en 2 etapas: La primera etapa consiste en realizar movimientos de abducción/aducción pura ($q_2=q_3=q_4=0°$). La segunda etapa consiste en realizar sólo movimientos de flexión/extensión ($q_1=0°$).

- **Control de posición para movimientos de abducción/aducción**

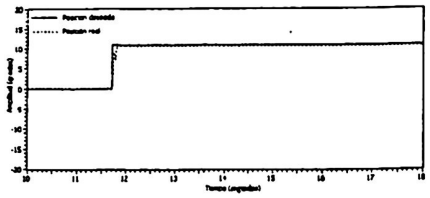
Los resultados de simulación y experimentación para este tipo de movimiento usando los 3 tipos de controladores mencionados se presentan a continuación. El movimiento consistió en mover la articulación 1 de la falange de abducción de una posición de 0° a 11°. Los errores de posición son:

- $e_{1\,Simulación}$: PID = -0.03411°, CBP = 1.765° e-5, PD+G = 0.0004938°.
- $e_{1\,Experimentación}$: PID = 0.642223°, CBP = 0.391869°, PD+G = 0.413175°.

Las figuras 3a, 3b y 3c ilustran el comportamiento dinámico que presenta la falange de abducción donde el controlador con mejor tiempo de respuesta es el CBP.



(a) (b)



(c)

Fig. 3. Experimentación: (a) Controlador PID, (b) Controlador PD+G y (c) CBP, movimiento de abducción, q_1.

El controlador con menor tiempo en alcanzar la referencia fue el CBP con un tiempo de 0.06 segundos, a diferencia de los controladores PID y PD+G (0.08 seg. y 0.07 seg., respectivamente).

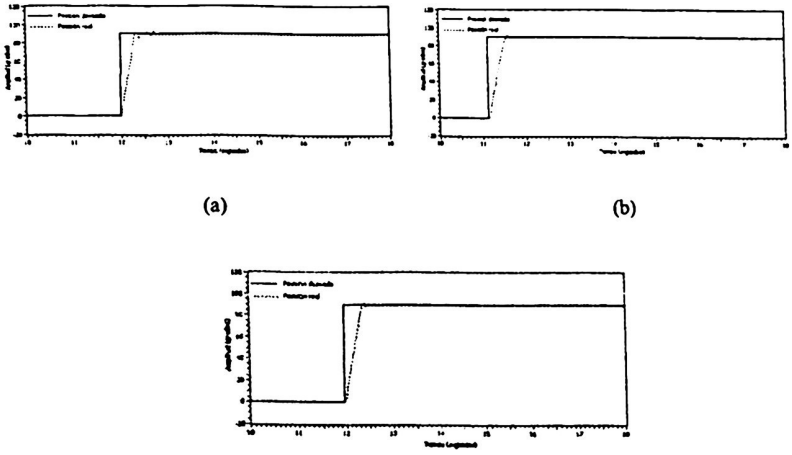
- **Control de posición para movimientos de flexión/extensión**

En esta segunda etapa se busca el control de posición de las falanges proximal, medial y distal simultáneamente. Los resultados correspondientes a cada falange se presentan a continuación.

Control de posición de la falange proximal

Los resultados del control de posición para la falange proximal de una posición de 0° a 90°, en simulación y en experimentación se muestran a continuación. Los errores de posición son:

- $e_{2\,Simulación}$: PID = -0.1669°, CBP = 1.173° e-9, PD+G = 3.598° e-7.
- $e_{2\,Experimentación}$: PID = 0.492728°, CBP = 0.191761°, PD+G = 0.44478°.



(a) (b)

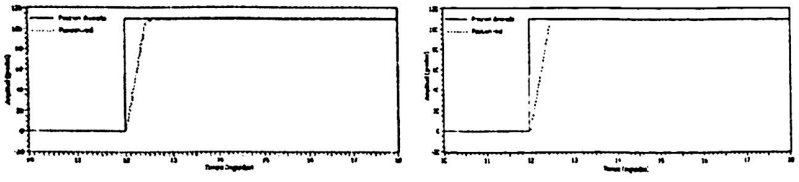
Fig. 4. Experimentación: (a) Controlador PID, (b) Controlador PD+G y (c) CBP, movimiento de la falange proximal, q_2.

Experimentalmente (Figuras 4a, 4b y 4c), los controladores con el menor tiempo para alcanzar la referencia fueron el CBP y el control PD+G, cuyo tiempo fue de 0.55 segundos, a diferencia del control PID (0.65seg).

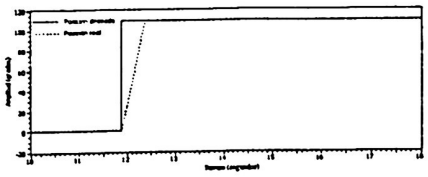
Control de posición de la falange medial

Los resultados de controlar la falange medial de una posición de 0° a 110° tanto en simulación como en experimentación se muestran a continuación. Los errores de posición son:

- $e_{3\,Simulación}$: PID = -0.204°, CBP = 1.434° e-9, PD+G = 4.665° e-7.
- $e_{3\,Experimentación}$: PID = 0.650746°, CBP = 0.541548°, PD+G = 0.719993°.



(a) (b)



(c)

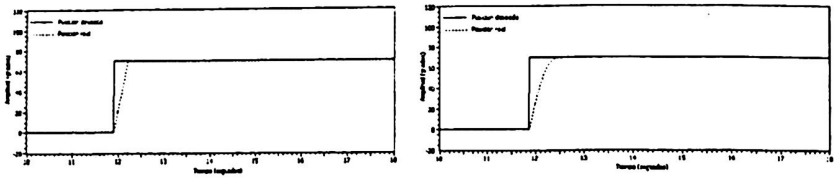
Fig. 5. Experimentación: (a) Controlador PID, (b) Controlador PD+G y (c) CBP, movimiento de la falange medial, q_3.

Experimentalmente (Figuras 5a, 5b y 5c), el controlador con un menor tiempo para alcanzar la referencia fue el CBP con un tiempo de 0.50 segundos, a diferencia de los controladores PID y PD+G (0.68 seg. y 0.51 seg., respectivamente).

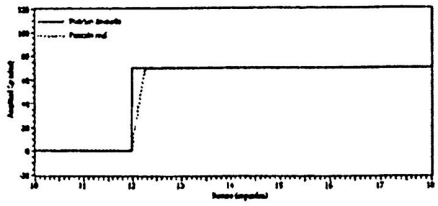
Control de posición de la falange distal

Los resultados de controlar la falange distal de una posición de 0° a 70° tanto en simulación como en experimentación se muestran a continuación. Los errores de posición son:

- $e_{4\,Simulación}$: PID = -0.204°, CBP = 1.434° e-9, PD+G = 4.665° e-7.
- $e_{4\,Experimentación}$: PID = 0.650746°, CBP = 0.541548°, PD+G = 0.719993°.



(a) (b)



(c)

Fig. 6. Experimentación: (a) Controlador PID, (b) Controlador PD+G y (c) CBP, movimiento de la falange distal, q_4.

En la parte experimental el controlador con menor tiempo en alcanzar la referencia fue el CBP (Fig. 6c) con un tiempo de 0.30 segundos, a diferencia de los controladores PID (Fig. 6a) y PD+G (Fig. 6b) (0.34 seg. y 0.6 seg., respectivamente).

4.3 Control de Seguimiento de Trayectorias

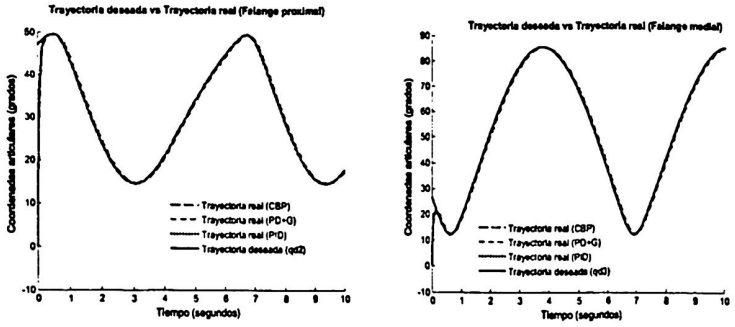
Para la prueba de seguimiento a trayectorias aplicadas a un dedo de la mano CENIDET (dedo índice) se plantea como objetivo que el extremo del dedo siga una trayectoria circular de acuerdo a los límites de operación y el espacio de trabajo del dedo.

Se presenta sólo la simulación del seguimiento a trayectorias aplicando los 3 controladores. La validación experimental para seguimiento a trayectorias no fue posible debido a problemas de tensión en las cuerdas al momento de alcanzar un punto y posteriormente al regresar al mismo punto. Esto produjo que la posición angular que señalaban los encoders no coincidiera con la posición real de cada falange.

La prueba de seguimiento de trayectorias en simulación es realizada sin movimiento de abducción/aducción. Sin embargo, el movimiento de flexión/extensión se realiza moviendo las falanges proximal, medial y distal simultáneamente.

Las figuras de la prueba de seguimiento a una trayectoria circular se muestran a continuación. Los errores del seguimiento a trayectorias son:

- PID: $q_1 = 0°$, $q_2 = 0.6650°$, $q_3 = 0.3785°$, $q_4 = 0.7964°$.
- CBP: $q_1 = 0°$, $q_2 = 0.2208°$, $q_3 = 0.1258°$, $q_4 = 0.2654°$.
- PD+G: $q_1 = 0°$, $q_2 = 0.4588°$, $q_3 = 0.2607°$, $q_4 = 0.5471°$.



(a) Falange proximal, q_2 (b) Falange medial, q_3.

Fig. 7. Simulación de seguimiento de trayectoria.

La figura 7a ilustra el comportamiento dinámico de la falange proximal empleando los controladores propuestos. Donde el tiempo en alcanzar la trayectoria deseada fueron: CBP = 0.2709 seg., PID = 0.41 seg. y PD+G = 0.3405 seg.

Similarmente, la figura 7b ilustra en simulación el comportamiento dinámico de la falange medial, presentándose en seguida el tiempo en alcanzar la trayectoria deseada: CPB = 0.2 seg., PID = 0.27 seg. y PD+G = 0.8127 seg., respectivamente.

Finalmente, la figura 8 representa el comportamiento dinámico de los controladores sometidos a seguir una trayectoria deseada, donde el tiempo en alcanzar dicha trayectoria fueron: CBP = 0.2314 seg., PID = 0.53 seg. y PD+G = 0.63 seg.

Para medir la cantidad de error presentado en cada prueba de seguimiento a trayectorias se usó el error cuadrático medio.

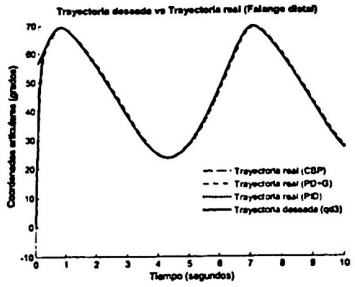


Fig. 8. Seguimiento de trayectoria en la falange distal, q_4.

5 Conclusiones

El modelado cinemático directo de la mano CENIDET resultó indispensable para conocer con precisión su espacio de trabajo. También resultó necesario conocer las fuerzas que actúan en el prototipo a través de su modelo dinámico. Con toda esta información fue posible desarrollar controladores de posición y seguimiento de trayectorias para la mano CENIDET.

Mediante las ecuaciones E-L se diseñó un controlador basado en pasividad que tiene la característica de estar enfocado al manejo de energía mediante el concepto de moldeo de energía. La aplicación de controles clásicos en robótica como el control PD+G y PID ayudan a comparar el desempeño de un CBP.

De la simulación de los diferentes controladores, se concluye que el CBP propuesto presenta mejores características como son; mejor tiempo de respuesta, no tiene sobretiros, tiene una respuesta suave y hace uso de la energía interna del sistema.

De la comparación de resultados experimentales y de simulación en esta aplicación se observa que éstos no son exactamente los mismos. Entre las causas de esta diferencia está el no considerar los efectos de fricción en el modelo dinámico y el grado de "patinaje" de bandas sobre las poleas (fenómenos que no son triviales de incluir en el modelado). No obstante, los resultados previamente obtenidos en el proceso de simulación fueron muy importantes en la etapa de implementación práctica de los mismos en el prototipo, teniendo que hacer ajustes finos en las ganancias de los controladores para que los resultados experimentales fueran congruentes.

La implementación experimental de los controladores sometidos a prueba de seguimiento a trayectorias no fue posible debido a problemas mecánicos presentados

en la mano CENIDET. Fue posible llevar un dedo a una posición deseada, pero controlar su posición de regreso hasta alcanzar su posición inicial no fue posible debido a que existe un patinaje de las bandas sobre las poleas.

Referencias

1. M. Takegaki and S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulators", Trans. of the ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 103, pp. 119-125, 1981.
2. S. Arimoto and F. Miyazaki, "Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability", in M. Brady and R.P. Paul (eds.), Robotics Research: First International Symposium, pp. 783-799, MIT Press, Boston, Mass., 1984.
3. S. Arimoto, "Passivity-Based Control", International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, pp. 227-232, April 2000.
4. J.C. Willems, "Dissipative dynamical systems, part I and II", Archieves of Rational Mechanics and Analysis, Vol 45, pp. 321-393, 1972.
5. A. Isidori and J.C. Willems, "Passivity feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems" IEEE Transactions on Automatic Control Vol. 36 pp. 1228-1240, 1991.
6. D. Hill and P. Moyland, "The stability of nonlinear dissipative systems" IEEE Transactions on Automatic Control Vol. 21, pp. 708-711, 1976.
7. D. Hill and P. Moyland, "Stability results for nonlinear feedback systems " Automática Vol. 13, pp. 377-382, 1977.
8. M. Takegaki and S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulators" ASME J. Dynamic Systems", Measurement and Control , Vol. 102, pp. 119-125, 1981.
9. J.J. Slotine and W. Li, "Adaptive Manipulator Control: a case of study" IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. AC-33, pp. 995-1003, 1988.
10. C. Hernando, H. Jesús, Tesis de Maestría: "Diseño de un sistema articulado emulando el movimiento de una mano", CENIDET, 2006.
11. J. J. Craig, "Robótica", Tercera Edición, Impreso en México, 2006, Edit. Prentice Hall.
12. A. Loria, "Notes on Dynamics of Eulcr-Lagrange Systems", Center for Control Engineering and Computation University of California. 1998.
13. R. Kelly, V. Santibáñez, "Control de Movimiento de Robots Manipuladores". Automática y robótica 2003, Edit. Prentice Hall.
14. B. Paden y R. Panja, Department of mechanical engineering and the NSF Center for Robotics in Microelectronics, "Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators", Int. Journal control, vol. 47, No.6, University of California, USA,1988, pp. 1697-1712.

Evasión de obstáculos en línea para manipuladores redundantes con restricciones

Rogelio Portillo, Carlos A. Cruz, and Alejandro Rodriguez

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.
Av. IPN No. 2508, C.P. 07360, México D.F., México
{rportillo,cacruz,aangeles}@cinvestav.mx
http://www.cinvestav.mx

Resumen Este artículo presenta un método de evasión de obstáculos en línea para manipuladores redundantes con restricciones físicas. El controlador propuesto considera dos partes. Primero se utiliza un PID cartesiano que logra estabilidad del sistema en lazo cerrado. La segunda parte del controlador considera un problema de optimización dividido a su vez en dos secciones. La primera de ellas considera el problema de optimización del error cartesiano en el efector final en posición. La segunda sección considera la evasión de obstáculos, que debido a la naturaleza del controlador pueden ser variantes en el tiempo. Es en esta parte del controlador donde se añaden al problema de optimización campos potenciales y las restricciones del manipulador por medio del uso del enfoque de funciones de barrera. Se utiliza el método de flujo gradiente para resolver el problema de optimización con restricciones. Se valida el control propuesto usando como plataforma experimental un robot planar tipo péndulo de 3 grados de libertad. Se presentan los resultados experimentales obtenidos, los cuales muestran la evasión del obstáculo dentro del espacio operacional y la realización exitosa de la tarea en espacio cartesiaizano, sin exceder las restricciones físicas del manipulador.
Palabras clave: Evasión de obstáculos, manipulador redundante, optimización, funciones de barrera, potenciales artificiales.

Abstract This paper presents an on-line obstacle avoidance method for redundant manipulators with physical constraints. The proposed controller considers two parts. First a Cartesian PID is used reaching closed loop stability. The second controller part considers an optimization problem divided in two sections. The first one considers the Cartesian position error optimization problem in the manipulator's end-effector. The second section considers obstacles avoidance that due to controller nature they can be time variant obstacles. In this part of the controller artificial potentials and barrier functions are added to the optimization problem . Gradient flow approach is used to solve the optimization problem and the on-line obstacle avoidance. The proposed control is validated using a three degree of freedom planar robot as an experimental platform. Experimental results are presented, which show the avoidance of the obstacle in operational space and the successful task performance in Cartesian space, keeping cartesian errors small and without exceeding manipulator space state constraints.
Keywords: Obstacle avoidance, redundant manipulator, optimization, barrier functions, artificial potentials.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 275-284

1. Introducción

El uso de manipuladores redundantes en ambientes industriales ha crecido debido a la gran variedad de tareas que pueden llevar a cabo. Para realizar estas tareas es necesario diseñar el robot con cierta estructura, la cual puede presentar restricciones físicas determinadas en muchas ocasiones por el área de trabajo del manipulador. Además, muchas de estas tareas se realizan con presencia de objetos ajenos al manipulador y a la tarea a realizar. Este es uno de los escenarios donde los manipuladores redundantes cobran mayor importancia debido a que, gracias a su estructura, estos pueden realizar múltiples tareas dentro de su espacio de trabajo. Una de estas tareas es la evasión de obstáculos. La estrategia natural de evasión de obstáculos es alejar el manipulador del obstáculo al hacer una reconfiguración de los eslabones, pero esto solo se puede hacer si el manipulador posee grados de libertad redundantes. Más aun, esta reconfiguración tradicionalmente requiere la cinemática inversa del manipulador la cual puede tener infinitas soluciones y en muchas ocasiones su solución es compleja y puede exceder los límites físicos del manipulador. Varios autores proponen técnicas de control para evasión de límites en las articulaciones, algunas usando algoritmos iterativos como los presentados en [1]. Algunos autores han usado potenciales artificiales para resolver el problema de evasión de obstáculos, sin embargo, aún hacen uso de la cinemática inversa del manipulador[2].

En este artículo se considera un controlador formador por dos partes, un PID cartesiano que se mapea al espacio articular mediante el jacobiano del manipulador y un controlador óptimo que realiza dos tareas, primero, mejorar el desempeño del PID cartesiano para que el efector final lleve a cabo la tarea de seguimiento de trayectorias y, segundo, evitar la colisión de los eslabones del manipulador con el objeto en espacio operacional al mismo tiempo que se evitan los límites en las articulaciones del manipulador. Debido a la definición de error en el espacio operacional cartesiano, se requiere la cinemática directa del manipulador. El problema de diseño del controlador es considerado como una optimización dinámica, el cual es resuelto en línea mediante el método del flujo gradiente [4]. Así pues, es necesario el cálculo de las sensitividades del modelo del manipulador respecto de los controles, que son las derivadas parciales de los estados del sistema respecto del control optimizante, para resolver en línea un conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución son las sensitividades mencionadas anteriormente. Este trabajo es una extensión del trabajo presentado en [3], donde solo se considera optimización del error de posición y velocidad en el efector final del manipulador sin considerar las restricciones físicas en el manipulador.

2. Modelos cinemático y dinámico del manipulador

Considere un robot rigido de n-grados de libertad rotacionales completamente actuados, con coordenadas generalizadas $q \in \mathbb{R}^n$. El espacio de trabajo del robot es m-dimensional, de manera general $n \geq m$, y para manipuladores redundantes $n > m$. La energía cinética del manipulador es $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$, con $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matriz de inercia simétrica y definida positiva, la energía potencial es $U(q)$. Aplicando el formalismo de Euler-Lagrange [6] el modelo del robot en coordenadas articulares, está dado por

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$
$$|q| \leq q^{\bullet} \tag{1}$$

donde $G(g) = \frac{\partial}{\partial q}U(q) \in \mathbb{R}^n$ denota las fuerzas gravitacionales, $C(q,\dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ representa la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis, $\tau \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de torques de entrada en cada uno de los eslabones y $q^{\bullet}$ un vector constante que representa la restricción de rotación en la articulaciones. Para describir completamente el manipulador es necesario caracterizar su modelo cinemático [7]. La cinemática directa del robot que relaciona las coordenadas generalizadas $q \in \mathbb{R}^n$ con las coordenadas cartesianas $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$, que usualmente representan las coordenadas del efector final, está dada por

$$\mathbf{X} = F_{DK}(q) \tag{2}$$

De manera análoga, la cinemática inversa del robot, que relaciona de manera inversa las coordenadas generalizadas y las cartesianas, está dada por

$$q = F_{IK}(\mathbf{X}) \tag{3}$$

El problema de la cinemática inversa tiene múltiples soluciones, las cuales pueden violar las restricciones articulares del manipulador.

Finalmente para relacionar el espacio articular y el espacio cartesiano es necesario relacionar los torques articulares τ con las fuerzas cartesianas F, para lo cual se utiliza el Jacobiano del manipulador dado por $J(q) = \frac{\partial F_{DK}(q)}{\partial q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con lo que las fuerzas cartesianas quedan relacionadas con los torques articulares mediante la relación

$$\tau = J(q)^T F \tag{4}$$

3. Control óptimo articular/cartesiano con restricciones

La segunda parte del controlador considera el problema de optimización del error de posicionamiento del efector final para mejorar el desempeño del controlador PID cartesiano, conjuntamente con el uso de potenciales artificiales y funciones de barrera. Al considerar lo anterior se propone el torque de entrada en (1), usando (4) como

$$\tau = J(q)^T F_{PID} + \tau_o \tag{5}$$

donde $F_{PID} \in \mathbb{R}^m$ es el control PID cartesiano, y $\tau_o \in \mathbb{R}^n$. Nótese que debido a la redundancia del robot ($n > m$), el Jacobiano $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ no es cuadrado.

3.1. PID cartesiano

El control PID cartesiano se basa en las variables cartesianas $\mathbf{X}$, por lo que al considerar la cinemática directa del robot (5) se obtiene

$$F_{PID} = K_{p,c}e_c + K_{d,c}\dot{e}_c + K_{i,c}\int e_c dt \tag{6}$$

donde $K_{p,c}, K_{d,c}, K_{i,c} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices diagonales de las ganancias proporcionales, derivativas e integrales, respectivamente, del controlador PID, $e_c \in \mathbb{R}^m$ representa el error cartesiano de seguimiento, $\dot{e}_c \in \mathbb{R}^m$ representa el error cartesiano de velocidad de seguimiento, los cuales están dados por

$$e_c = \mathbf{X}_d - \mathbf{X} = \mathbf{X}_d - F_{DK}(q) \tag{7}$$

$$\dot{e}_c = \dot{\mathbf{X}}_d - \dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}_d - J(q)\dot{q} \tag{8}$$

donde $\mathbf{X}_d, \dot{\mathbf{X}}_d$ son las posiciones y velocidades cartesianas deseadas respectivamente.

3.2. Control óptimo en línea

Para mejorar el desempeño del controlador en lazo cerrado y además realizar la tarea de evasión de obstáculos se considera un problema de optimización dinámico relacionado con el error de posicionamiento del efector final e_c y con la distancia e_{o_i} relacionada con la posición $\mathbf{X}_o$ del obstáculo y la posición del extremo $\mathbf{X}_i$ de cada uno de los tres eslabones del manipulador mediante la siguiente expresión

$$e_{o_i} = \mathbf{X}_o - \mathbf{X}_i \tag{9}$$

Se añaden potenciales artificiales al índice de optimización de posición para representar el obstáculo, estos tienen la forma presentada en [9]. Más aún, para considerar las restricciones de movimiento del manipulador se utiliza el enfoque de funciones de barrera presentado en [8]. El problema de optimización se formula entonces como

$$\min_{\tau_{o_i}} \; I_i = \frac{1}{2} e_c^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha_i}{e_{o_i}^2 + \rho_i} \right) - \frac{\mu_i}{q_i - q^*} + \frac{\mu_i}{q_i + q^*} \right] \tag{10}$$

donde q_i es la posición angular del i-esimo eslabón, α_i y μ_i son ganancias de la función de optimización y ρ_i un parámetro de diseño del controlador relacionado con la distancia a la que actúa el potencial sobre el manipulador, e_c es el error de posicionamiento cartesiano y e_{o_i} es la distancia entre el obstáculo y el i-esimo eslabón. El problema de optimización está sujeto a la dinámica del manipulador y a la restricción de posición dada por

$$\begin{gathered} M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = J(q)^T F_{PID} + \tau_o \\ |q| \leq q^* \end{gathered} \tag{11}$$

Para resolver el problema dinámico de optimización en línea (10), se usa el método del flujo gradiente [4]. Se obtiene el gradiente del índice de desempeño (10) respecto de la variable de optimización τ_o, como

$$\dot{\tau}_{o_i} = -\gamma \frac{\partial I_i}{\partial \tau_{o_i}} \tag{12}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal de ganancias relacionada con la convergencia del método del flujo gradiente. Usando además (7) y (8), obtenemos

$$\frac{\partial l}{\partial \tau_{o_i}} = 2e_d\left(-\alpha_i e_d\left(\frac{e_{o_i}}{(e_{o_i}^2+\rho_i)^2}\right)\frac{\partial e_{o_i}}{\partial \tau_{o_i}} + \left(1+\left(\frac{\alpha_i}{e_{o_i}^2+\rho_i}\right)\frac{\partial e_{o_i}}{\partial \tau_{o_i}}\right)\right) + \left(\frac{\mu_i}{(q_i-q^+)^2} - \frac{\mu_i}{(q_i+q^+)^2}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \tau_{o_i}} \tag{13}$$

de tal manera que por regla de la cadena se sigue que $\frac{\partial F_{DK}}{\partial \tau_{o_i}}$ depende de las sensitividades $\left[\frac{\partial q}{\partial \tau_{o_i}}\right]$, que se obtienen mediante derivación parcial en (11), de tal forma que

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}\left[J(q)^T F_{PID} + \tau_o - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q)\right] \tag{14}$$

Ahora, considere el vector columna $\xi = [q\ \dot{q}\ q_I]^T \in \mathbb{R}^{(2n+m)\times 1}$, donde q_I denota los estados relacionados con la parte integral del controlador PID (6), derivando este vector respecto del tiempo y usando (14) se obtiene un sistema dinámico no lineal de la forma

$$\dot{\xi} = f(\xi, \tau_{o_i}) \tag{15}$$

Luego derivando este sistema respecto de τ_{o_i} e invirtiendo el orden de los operadores lineales $\left[\frac{\partial}{\partial \tau_{o_i}},\ \frac{d}{dt}\right]$, se sigue que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \xi}{\partial \tau_{o_i}} = \frac{\partial f(\xi,\tau_{o_i})}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau_{o_i}} + \frac{\partial f(\xi,\tau_{o_i})}{\partial \tau_{o_i}} \tag{16}$$

Nótese que $\frac{\partial \xi}{\partial \tau_{o_i}}$ ccorresponde a la matriz de sensitividades, más aún, (16) es un sistema dinámico lineal en términos de $\frac{\partial \xi}{\partial \tau_{o_i}}$. La complejidad del control óptimo recae en el cálculo de las sensitividades $\frac{\partial q}{\partial \tau_{o_i}}$, sin embargo para casos en que sea impráctico el cálculo exacto de éstas, existen aproximaciones numéricas como se presentan en [5].



Figura 1. Robot planar de 3 grados de libertad.

4. Resultados

La plataforma experimental del controlador propuesto 5 es un manipulador redundante cartesiano de tres grados de libertad mostrado en la figura (1), su diseño y construcción es presentado en [10], sus características técnicas se detallan en la **tabla 1.**

Tabla 1. Datos técnicos de los Servomotores

Característica	Dato
Voltaje Nominal	24 [V]
Velocidad sin carga	23 000 rpm
Relación de reducción	159:01
Torque máximo	4.5 N m
Resolución	500 ppr

Para estimar los valores de los parámetros del manipulador se usaron herramientas CAD, sus valores se presentan en la **tabla 2.**

Tabla 2. Parámetos físicos del Robot

i	$m_i[Kg]$	$I_i[Kgm^2]$	$l_{c_i}[m]$	$l_i[m]$
1	0.7	16.84×10^{-3}	0.144	0.175
2	0.6	8.4×10^{-3}	0.108	0.130
3	0.12	0.25×10^{-3}	0.060	0.147

La trayectoria que se desea en el efector final $\mathbf{X}_d$ en (7) se realiza durante 60 segundos y sigue una trayectoria circular dada por

$$\mathbf{X}_d = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} 0{,}05\sin(\omega t) + 0{,}25[m] \\ 0{,}05\cos(\omega t) - 0{,}2 \ \ [m] \end{cases} \tag{17}$$

con ω la frecuencia de la trayectoria deseada, en este caso de $\omega = 1$. El obstáculo es una esfera que se mueve en dirección horizontal acercándose al primer eslabón. La trayectoria del obstáculo es una recta horizontal que inicia en $x_i = -0{,}5[m]$, termina en $x_f = 0[m]$ y es realizada en un tiempo $t_o = 10[s]$, y está dada por

$$\mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{cases} -0{,}001t^3 + 0{,}015t^2 - 0{,}5[m] \\ -0{,}175 \qquad\qquad\qquad [m] \end{cases} \tag{18}$$

Por razones de seguridad los pares suministrados a los eslabones están limitados en la parte experimental a $\tau_1 \leq 4{,}0$, $\tau_2 \leq 3{,}5$ y $\tau_3 \leq 3{,}0$ [Nm]. En la condición inicial el robot se encuentra totalmente vertical con el efector final apuntando hacia abajo, es decir, $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$, por lo que la posición inicial del efector final del robot es $x = 0[m]$ y $y = -0{,}427[m]$. La restricción de movimiento se toma en cuenta en el problema de optimización usando el enfoque de funciones de barrera [8] en (10). Por lo que se tiene que $|q| \leq q^*$, con $q^* = 2{,}618rad$.

Con el propósito de comparar el comportamiento del manipulador al realizar la tarea con y sin la presencia del obstáculo, además de comprobar que las restricciones de movimiento se cumplen en todo momento, primero se prueba el PID cartesiano. Luego se utiliza la estrategia de control óptimo para evasión de obstáculos con restricciones. Las ganancias utilizadas en cada uno de los eslabones se muestran en la **tabla 3.**

Tabla 3. Ganancias del PID carteisano

	$K_{p,c}$	$K_{d,c}$	$K_{i,c}$
X	1200	160	5
Y	1500	160	5

4.1. Control PID cartesiano

La figura (2) muestra la trayectoria del efector final, la cual puede ser comparada con la trayectoria deseada (17). Los errores cartesianos (7) se muestran en la figura (3). La figura (4) muestra los pares de entrada, la figura (5) las posiciones angulares de los eslabones del robot.

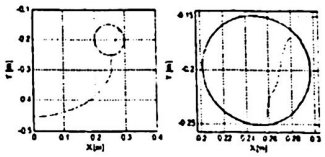


Fig 2. Trayectoria seguida por el efector final (PID cartesiano).

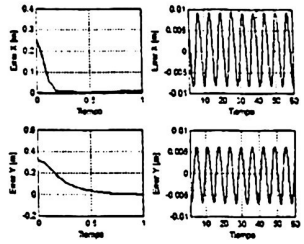


Fig 3. Errores cartesianos y su acercamiento [m] (PID cartesiano).

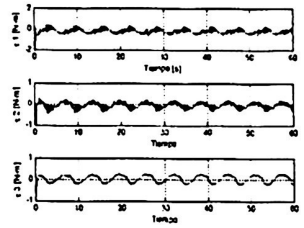


Fig 4. Torques articulares [Nm] (PID cartesiano).

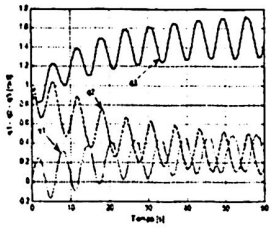


Fig 5. Posiciones angulares de los eslabones del robot [rad] (PID cartesiano).

4.2. Control óptimo para evasión de obstáculos

Para realizar la comparación se conservan las ganancias del PID cartesiano mostradas en la tabla 3. Las ganancias de la parte optimizante del controlador son $\gamma_i = 0{,}0005$ $\alpha_i = 0{,}0001$, $\mu_i = 1 \times 10^{-10}$, y $\rho_i = 1$ donde γ_i, α_i, y ρ_i corresponde al eslabón i, para $i = 1, 2, 3$. La figura (6) muestra la trayectoria del efector final, la cual puede ser comparada con la trayectoria deseada (17). Los errores cartesianos (7) se muestran en la figura (7). La figura (8) muestra los torques de entrada, la figura (9) muestra las posiciones angulares de los eslabones del manipulador, las sensitividades del eslabón i, para $i = 1, 2, 3$ se muestran en la figura (10).

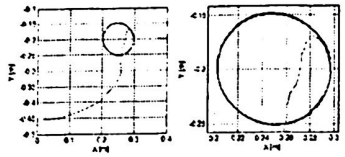


Fig 6. Trayectoria seguida por el efector final (PID cartesiano + τ_o).

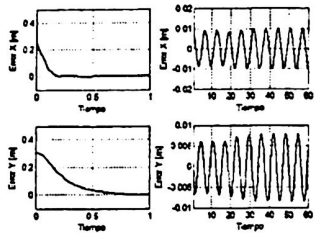


Fig 7. Errores cartesianos y su acercamiento [m] (PID cartesiano + τ_o).

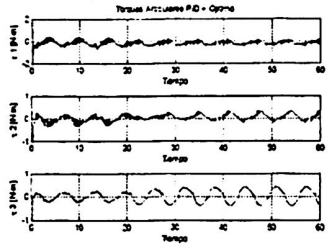


Fig 8. Torques articulares [Nm] (PID cartesiano + τ_o).

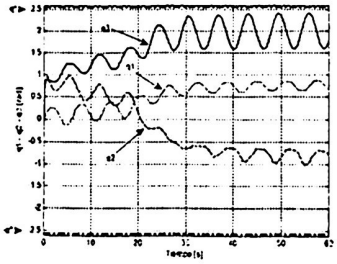


Fig 9. Posiciones angulares de los eslabones del robot [rad] (PID cartesiano + τ_o).

4.3. Discusión de los resultados

Se puede observar fácilmente de las figuras (2) y (6) que la tarea de seguimiento de trayectorias es realizada de manera exitosa por ambos controladores, no así la de evasión de obstáculos.

De las figuras (5) y (9) se observa que la tarea de evasión de obstáculos se logra de tal manera que el robot se reconfigura tomando valores distintos en las posiciones angulares, en ambos casos sin exceder los límites en las juntas del manipulador. Esta reconfiguración no afecta de manera significativa el desempeño del manipulador al realizar la tarea de seguimiento.

Esto se puede ver en las figuras (3) y (7) donde los errores cartesianos se mantienen pequeños. En la figura (9) se observa que el eslabón de la base es el que rige la nueva configuración, al ampliar su rotación, lo cual ocasiona que el eslabón dos cambie su sentido de rotación para mantener los errores de seguimiento cercanos a cero y al mismo tiempo realizar exitosamente la tarea de evasión de obstáculos sin exceder los límites en las juntas del manipulador. Cuando los errores cartesianos son pequeños la parte del controlador óptimo se encarga de mejorar el comportamiento de seguimiento de trayectorias, al mismo tiempo que se ocupa de llevar a cabo la tarea de evasión de obstáculos en línea. La figura (10) muestra el comportamiento en el tiempo de las sensitividades articulares, las cuales son acotadas. Finalmente la figura (11) muestra las dos configuraciones realizadas por el manipulador para cada uno de los controles probados.

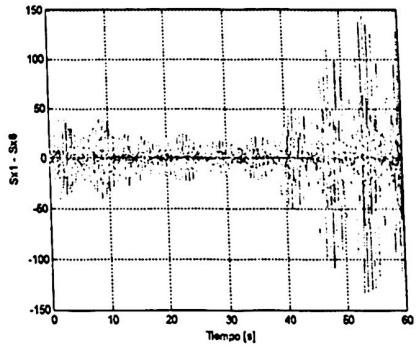


Fig 10. Sensitividades articulares (PID cartesiano + τ_o).

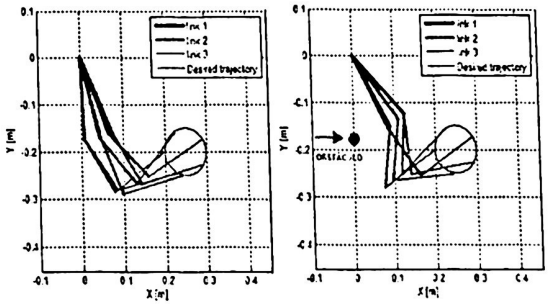


Fig 11. Configuraciones del manipulador (PID) / (PID cartesiano + τ_o).

5. Conclusiones

Se ha presentado un controlador cartesiano/articular para manipuladores redundantes, el cual combina un control PID cartesiano para propósitos de estabilización y un control óptimo para mejoramiento de seguimiento de trayectorias y evasión de obstáculos. El controlador está diseñado para seguimiento de trayectorias, sin embargo no se necesita la cinemática inversa del robot. La parte optimizante del robot resuelve el problema de planeación de trayectorias y al mismo tiempo el problema de evasión de obstáculos, minimizando el error de seguimiento de trayectorias. Esto se logra sin exceder en momento alguno las restricciones de posición del robot. Los resultados experimentales muestran que las tareas de seguimiento de trayectorias y de evasión de obstáculos son logradas con éxito, al mismo tiempo que las restricciones de posición angular del manipulador no se violan en tiempo alguno.

Referencias

1. Chaumette F., Marchand E.,.. *A Redundancy-Based Iterative Approach for Avoiding Joint Limits: Application to Visual Servoing*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, No. 5, October 2001.
2. Nakamura, Y. *Advanced Robotics : Redundancy and Optimization*. Adison-Wesley, 1991. P.p. 135-150.
3. Cruz V. C.A., Rodríguez A. A., Muro M.D.*On-line Joint/Cartesian Optimal Control of Redundant Robot Manipulators without Inverse Kinematics*. En memorias del congreso AMROB, 2007.
4. Helmke, U., and J.B. Moore. *Optimization and Dynamical Systems*. Springer Verlag. London, 1996.
5. Maly, T., and L. Petzold. *Numerical Methods and Software for Sensitivity Analysis of Differential-Algebraic Systems*, Applied Numerical Mathematics, 20, p.p. 57-59, 1996.
6. Lewis, Lewis, F. L., C. T. Abdallah, and D. M. Dawson. *Control of Robot Manipulators*. Macmillan Publishing. New York, 1993.
7. Spong, M. W., and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. JohnWiley and Sons. New York, 1989.
8. Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M.. *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons Inc. Second edition. 1993.
9. Mather Khatib. *Sensor based motion control for module robots*. Tesis Doctorado. LAAS-CNRS, Toulouse, France, 1994.
10. Muro M.D, Cruz V. C.A., Rodríguez A. A.*Diseño, modelado y construcción de un manipulador redundante*. En memorias del 5° congreso CIINDET 2007.
11. Smith, T.F., Waterman, M.S.: Identification of Common Molecular Subsequences. J. Mol. Biol. 147, 195–197 (1981)

Los autores agradecen el apoyo recibido por parte del CONACYT por medio del proyecto No. 61838.

A Practical PID Controller with Bounded Torques for Robot Manipulators

Víctor Santibáñez[†*], Karla Camarillo[†], Javier Moreno-Valenzuela[‡], and Ricardo Campa[†]

[†] Instituto Tecnológico de la Laguna,
Blvd. Revolución y Cuauhtémoc, Torreón, Coahuila, 27000, México
[‡] Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital del IPN
Av. Parque 1310, Mesa de Otay, Tijuana, B.C., 22510, México
{santibanez,recampa}@ieee.org,{vsantiba,recampa}@itlalaguna.edu.mx
karla_camarillo@hotmail.com,moreno@citedi.mx
http://www.itlalaguna.edu.mx

Abstract. This paper proposes a saturated nonlinear PID controller for industrial robot manipulators. Our controller considers the natural saturation problem given by the output of the control computer, the saturation phenomenon of the internal PI velocity controller in the servo driver and the actuator torque constraints of the robot manipulators. An approach based on the singular perturbation method is used to analyze the local exponential stability of the closed-loop system. We obtain sufficient conditions that allow us to achieve local regulation at a desired joint position.

Key words: Robot Control, PID, Bounded Control, Industrial Robots

1 Introduction

It is well known that industrial robots are equipped with PID controllers, that practically assure the semiglobal asymptotic stability of the closed-loop equilibrium for the regulation case [1]-[8]. Also, it is known that the real-life actuators are unable to supply unlimited torque, and their output is bounded. This implies physical constraints which if are not taken into account in the design of the controller, can affect the stability and performance of the closed-loop system [9]-[14].

Furthermore, industrial robots are equipped with a position control computer which produces the commands of desired joint velocities. These commands are bounded in the same way than the actuators output. In this work we consider these two constraints to design our controller.

Several approaches have been proposed in the literature for the problem of regulation case of robot manipulators with bounded inputs; different analytical frameworks and control objectives are considered. Some works have been

* This work was partially supported by CONACyT and DGEST, Mexico.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 285-294

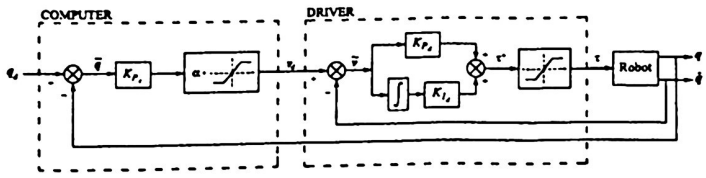


Fig. 1. Scheme of a practical nonlinear PID controller with bounded torques for robot manipulators.

reported to solve this problem [9]–[14]. Solutions without considering velocity measurements with gravity compensation are treated in [12]. A full–state (position and velocity) feedback solution with adaptive–gravity compensation is presented in [15]. More recently, new schemes dealing with the problem of robot manipulators with bounded inputs have been presented: [16]–[20]. An adaptive approach involving task–space coordinates considering the uncertainties of the kinematic model of the robot manipulator is proposed in [18].

Some works that deal with global nonlinear PID regulators based on Lyapunov and passivity theory have been reported in [21]–[24], but without considering the influence of the saturation phenomenon.

A few saturated PID controllers have been reported; for the case of semiglobal asymptotic stability, a saturated linear PID controller was presented in [19] and [20]; for the case of global asymptotic stability, saturated nonlinear PID controllers were introduced in [25] and [26].

In this paper, we propose a new saturated nonlinear PID regulator for robot manipulators. The structure of this new proposed controller is closer to the structure of the practical PID controllers used in the industry. Fig. 1 shows the scheme that we consider to design our saturated nonlinear PID controller where it clearly shows the constraints over the input and output commands of the servo driver. We use a proportional controller as external position control and a joint velocity PI controller which is intrinsic in the servo drivers of the actuators of the robot manipulators.

We employ the singular perturbation theory to analyze local exponential stability of the equilibrium of the closed–loop system.

Throughout this paper, we use the notation $\lambda_{\min}\{A(\boldsymbol{x})\}$ and $\lambda_{\max}\{A(\boldsymbol{x})\}$ to indicate the smallest and largest eigenvalues, respectively, of a symmetric positive definite bounded matrix $A(\boldsymbol{x})$, for any $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Also, we define $\lambda_{\min}\{A\}$ as the greatest lower bound (infimum) of $\lambda_{\min}\{A(\boldsymbol{x})\}$, for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, that is, $\lambda_{\min}\{A\} = \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \lambda_{\min}\{A(\boldsymbol{x})\}$. Similarly, we define $\lambda_{\max}\{A\}$ as the least upper bound (supremum) of $\lambda_{\max}\{A(\boldsymbol{x})\}$, for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, that is, $\lambda_{\max}\{A\} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \lambda_{\max}\{A(\boldsymbol{x})\}$. The norm of vector $\boldsymbol{x}$ is defined as $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$ and that of matrix $A(\boldsymbol{x})$ is defined as the corresponding induced norm $\|A(\boldsymbol{x})\| = \sqrt{\lambda_{\max}\{A(\boldsymbol{x})^T A(\boldsymbol{x})\}}$.

2 Preliminaries

2.1 Robot dynamics

The dynamics of a serial n–link rigid robot, without the effect of friction, can be written as [27]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \tag{1}$$

where $q \in \mathbb{R}^n$ is the vector of joint positions, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ is the vector of joint velocities, $\tau \in \mathbb{R}^n$ is the vector of applied torques, $M(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is the symmetric positive definite manipulator inertia matrix, $C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is the matrix of centripetal and Coriolis torques and $g(q) \in \mathbb{R}^n$ is the vector of gravitational torques obtained as the gradient of the robot potential energy $U(q)$, i.e.

$$g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}. \tag{2}$$

We assume that all the joints of the robot are revolute type.

2.2 Properties of the robot dynamics

We recall two important properties of dynamics (1) which are useful in our paper:

Property 1. The matrix $C(q,\dot{q})$ and the time derivative $\dot{M}(q)$ of the inertia matrix satisfy [28], [29]:

$$\dot{q}^T\left[\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q,\dot{q})\right]\dot{q} = 0 \qquad \forall\, q,\dot{q} \in \mathbb{R}^n.$$

◇

Property 2. The gravitational torque vector $g(q)$ is bounded for all $q \in \mathbb{R}^n$. This means that there exist finite constants $\gamma_i \geq 0$ such that [30]:

$$\sup_{q\in\mathbb{R}^n} |g_i(q)| \leq \gamma_i \qquad i = 1,\cdots,n, \tag{3}$$

where $g_i(q)$ stands for the elements of $g(q)$. Equivalently, there exists a constant k' such that

$$\|g(q)\| \leq k' \quad \text{for all} \quad q \in \mathbb{R}^n.$$

Furthermore there exists a positive constant k_g such that

$$\left\|\frac{\partial g(x)}{\partial q}\right\| \leq k_g,$$

for all $q \in \mathbb{R}^n$, and

$$\|g(x) - g(y)\| \leq k_g\|x - y\|,$$

for all $x, y \in \mathbb{R}^n$. ◇

2.3 Problem formulation

Before presenting the formulation of the control problem, we recall some useful definitions.

Definition 1. The hard saturation function is denoted in this work by $\mathbf{sat}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k}) \in \mathbb{R}^n$, where

$$\mathbf{sat}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k}) = \begin{bmatrix} \mathrm{sat}(x_1;k_1) \\ \mathrm{sat}(x_2;k_2) \\ \vdots \\ \mathrm{sat}(x_n;k_n) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix},$$

with k_i being the i-th saturation limit, $i = 1, 2, \ldots, n$, and each element of $\mathbf{sat}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{k})$ is defined as:

$$\mathrm{sat}(x_i;k_i) = \begin{cases} x_i & \text{if } |x_i| \leq k_i \\ k_i & \text{if } x_i > k_i \\ -k_i & \text{if } x_i < -k_i \end{cases}$$

◇

Furthermore, the control scheme proposed in this paper involves special saturation functions that fits into the following definition.

Definition 2. [16] Given positive constants l and m, with $l < m$, a function $\mathrm{Sat}(x;l,m) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{Sat}(x;l,m)$ is said to be a strictly increasing linear saturation function for (l,m) if it is locally Lipschitz, strictly increasing, C^2 differentiable and satisfies:

1) $\mathrm{Sat}(x;l,m) = x$ when $|x| \leq l$
2) $|\mathrm{Sat}(x;l,m)| < m$ for all $x \in \mathbb{R}$. ◇

For instance, the following saturation function is a special case of a linear saturations given in Definition 2, i.e.:

$$\mathrm{Sat}(x;l,m) = \begin{cases} -l+(m-l)\tanh\left(\frac{x+l}{m-l}\right) & \text{if } x < -l \\ x & \text{if } |x| \leq l \\ l+(m-l)\tanh\left(\frac{x-l}{m-l}\right) & \text{if } x > l \end{cases} \tag{4}$$

The n-saturation functions are joined together in an $n \times 1$ saturation function vector denoted by $\mathbf{Sat}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})$, i.e.,

$$\mathbf{Sat}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}) = \begin{bmatrix} \mathrm{Sat}(x_1;l_1,m_1) \\ \mathrm{Sat}(x_2;l_2,m_2) \\ \vdots \\ \mathrm{Sat}(x_n;l_n,m_n) \end{bmatrix},$$

where $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$, that is,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}.$$

Consider the robot dynamic model (1). Assume that each joint actuator is able to supply a known maximum torque $\tau_i^{\max}$ so that:

$$|\tau_i| \leq \tau_i^{\max}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

where τ_i stands for the i–entry of vector $\boldsymbol{\tau}$. In other words, if u_i represents the control signal (controller output) before the actuator, related to the ith–joint, then

$$\tau_i = \tau_i^{\max} \text{sat}\left(\frac{u_i}{\tau_i^{\max}}\right), \tag{6}$$

for $i = 1, \ldots, n$, where $\text{sat}(\cdot)$ is the standard hard saturation function. We also assume:

Assumption 1. The maximum torque $\tau_i^{\max}$ of each actuator satisfies the following condition:

$$\tau_i^{\max} > \gamma_i, \tag{7}$$

where γ_i was defined in Property 2, with $i = 1, 2, ..., n$. ◇

This assumption means that the robot actuators are able to supply torques in order to hold the robot at rest for all desired joint position $\boldsymbol{q}_d \in \mathbb{R}^n$.

The control problem is to design a controller, under model uncertainty, to compute the torque $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ applied to the joints, satisfying the constraints (5), such that the robot joint positions $\boldsymbol{q}$ tend asymptotically toward the constant desired joint positions $\boldsymbol{q}_d$.

3 The proposed control scheme

In this section we present a nonlinear PID controller which can be seen as a practical version of the classical PID control of robot manipulators.

As shown in Fig. 1, the proposed controller is formed by two loops: an outer joint position proportional P loop and an inner joint velocity proportional–integral PI loop. Without considering the actuator saturation effects, in [32], it was proven that an outer loop position P controller (according to Fig. 1, $\boldsymbol{v}_d = K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}}$) together with an inner velocity PI controller (according to Fig. 1, $\boldsymbol{\tau} = K_{p_d}\tilde{\boldsymbol{v}} + K_{i_d}\int_0^t \tilde{\boldsymbol{v}}(r)dr$) conform a classical PID controller, that is:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p\tilde{\boldsymbol{q}} + K_i\boldsymbol{w} - K_v\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{w} = \int_0^t \tilde{\boldsymbol{q}}(r)\, dr$$

where $K_p = K_{p_d}K_{p_c} + K_{i_d}$, $K_v = K_{P_d}$, $K_i = K_{i_d}K_{p_c} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ are diagonal positive definite matrices, $\tilde{q} = q_d - q \in \mathbb{R}^n$ is the position error vector and $\tilde{v} = v_d - \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ is the velocity error vector.

However, in the real applications the commands supplied by the computer (position P loop) are limited by intrinsic constraints of the electronic devices, and the servo–drivers (velocity PI loop) and the actuators are unable to supply unlimited torques, so we must take into account these constraints in the closed–loop stability analysis.

To this end, consider that, according to Fig. 1, the position controller implemented by the computer is given by

$$v_d = \alpha \mathbf{Sat}(K_{p_c}\tilde{q}; l_p, m_p), \tag{8}$$

where $K_{p_c} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is a diagonal positive definite matrix whose elements are $k_{p_{c_i}}$ with $i = 1, 2...n$, α is a small positive constant suitably selected and $\mathbf{Sat}(K_{p_c}\tilde{q}; l_p, m_p)$ is a saturation function defined in Definition 2 for some (l_p, m_p), where l_p and m_p are vectors whose elements are l_{p_i} and m_{p_i}, respectively, with $i = 1, 2, \ldots, n$.

The joint velocity PI controller, in practice, is naturally implemented into the servo–drivers as:

$$\tau^* = K_{p_d}\tilde{v} + K_{i_d}\int_0^t \tilde{v}(r)dr \tag{9}$$

where K_{p_d}, $K_{i_d} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ are diagonal positive definite matrices, and $\tilde{v}$ is the joint velocity error vector given by

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= v_d - \dot{q} \\ &= \alpha \mathbf{Sat}(K_{p_c}\tilde{q}; l_p, m_p) - \dot{q},\end{aligned} \tag{10}$$

Substituting (10) in (9) we obtain

$$\tau^* = \alpha K_{p_d}\mathbf{Sat}(K_{p_c}\tilde{q}; l_p, m_p) - K_{p_d}\dot{q} + K_{i_d}\int_0^t [\alpha \mathbf{Sat}(K_{p_c}\tilde{q}(r); l_p, m_p) - \dot{q}(r)]dr$$

which has the form of the nonlinear PID global regulator in [21], [23], that is,

$$\tau^* = K_p\mathbf{Sat}(K_{p_c}\tilde{q}; l_p, m_p) - K_v\dot{q} + K_i\int_0^t [\alpha \mathbf{Sat}(K_{p_c}\tilde{q}(r); l_p, m_p) - \dot{q}(r)]dr,$$

with

$$\begin{aligned}K_p &= \alpha K_{p_d}, \\ K_v &= K_{p_d}, \\ K_i &= K_{i_d},\end{aligned}$$

where K_p, K_v, $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ are diagonal positive definite matrices whose elements are k_{p_i}, k_{v_i}, k_{i_i} respectively, with $i = 1, 2...n$.

Finally, due to the servo–drivers and the torque actuators are physically limited, the nonlinear PID controller naturally results in a nonlinear PID controller with bounded torques given by

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{Sat}\left[K_p\mathbf{Sat}\left(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}};\boldsymbol{l}_p,\boldsymbol{m}_p\right) - K_v\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{w}\right];\boldsymbol{l}_{pi},\boldsymbol{m}_{pi}\right] \\ \boldsymbol{w} &= K_i\int_0^t \left[\alpha\mathbf{Sat}(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}}(r);\boldsymbol{l}_p,\boldsymbol{m}_p) - \dot{\boldsymbol{q}}(r)\right]dr \end{aligned} \tag{11}$$

where $\mathbf{Sat}\left[K_p\mathbf{Sat}\left(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}};\boldsymbol{l}_p,\boldsymbol{m}_p\right) - K_v\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{w};\boldsymbol{l}_{pi},\boldsymbol{m}_{pi}\right]$ is a vector whose elements are strictly increasing linear saturation functions such as those in Definition 2, for some $(\boldsymbol{l}_{pi},\boldsymbol{m}_{pi})$, where $\boldsymbol{l}_{pi}$ and $\boldsymbol{m}_{pi}$ are vectors whose elements are l_{pi_i} and m_{pi_i}, respectively, with $i = 1, 2, \ldots, n$, satisfying the following assumption.

Assumption 2: The saturation limits of the P and the PI loops satisfy:

$$\gamma_i < l_{p_i} < m_{p_i} < l_{pi_i} < m_{pi_i} < \tau_i^{\max}. \tag{12}$$

◇

Remark: In the practice, the saturation constraints of the electronic devices and the actuators are in fact, hard saturations like those in Definition 1. However, with the end of carrying out the stability analysis, they can be approximated by linear saturation functions like those defined in Definition 2 with $l < m$ and l arbitrarily close to m.

In order to simplify the notation, henceforth, we will omit the limits of the saturation functions.

4 Main Result

4.1 Closed–loop system

By substituting (11) into the robot dynamics (1), we obtain

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\boldsymbol{q}} \\ M(\boldsymbol{q})^{-1}\left[\mathbf{Sat}\left[K_p\mathbf{Sat}\left(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}}\right) - K_v\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{w}\right] - C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\right] \\ K_i\left[\alpha\mathbf{Sat}\left(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}}\right) - \dot{\boldsymbol{q}}\right] \end{bmatrix} \tag{13}$$

which is an autonomous differential equation with an unique equilibrium point given by $[\tilde{\boldsymbol{q}}^T\ \dot{\boldsymbol{q}}^T\ \boldsymbol{w}^T]^T = [\boldsymbol{0}^T\ \boldsymbol{0}^T\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_d)^T]^T \in \mathbb{R}^{3n}$, where we have used the Assumption 2, that is, $l_{pi_i} > \gamma_i$ to get that $\mathbf{Sat}(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_d) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{w} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_d)$. In order to move the equilibrium point of (13) to the origin, we apply the following change of variables $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_d)$. Now the new closed-loop system is given by:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\boldsymbol{q}} \\ M(\boldsymbol{q})^{-1}\left[\mathbf{Sat}\left[K_p\mathbf{Sat}\left(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}}\right) - K_v\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_d)\right] - C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\right] \\ K_i\left[\alpha\mathbf{Sat}\left(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}}\right) - \dot{\boldsymbol{q}}\right] \end{bmatrix} \tag{14}$$

The previous closed-loop system can be studied as a singularly perturbed system. To this end, by choosing the integral gain matrix as $K_i = \varepsilon K_i^*$, where K_i^* is a diagonal positive definite matrix and $\varepsilon > 0$ is a small parameter and letting $t' = \varepsilon t$ be a new time-scale (t' is slow time compared to t), the system (14) can be described as a two first-order differential equations as follows:

$$\frac{d}{dt'}\boldsymbol{x} = K_i^* \left[\alpha \mathbf{Sat}\left(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}}\right) - \dot{\boldsymbol{q}}\right] \tag{15}$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt'}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\boldsymbol{q}} \\ M(\boldsymbol{q})^{-1}\left[\mathbf{Sat}\left[K_p \mathbf{Sat}\left(K_{p_c}\tilde{\boldsymbol{q}}\right) - K_v\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}_d)\right] - C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\right] \end{bmatrix} \tag{16}$$

Our main contribution is summarized in the following

Proposition 1. Consider the robot dynamics (1) in closed-loop with the practical saturated PID control law (11). Under Assumption 2, and

$$k_{p_i} l_{p_i} > |x_i + g_i(q_d) - g_i(q_d - \tilde{q})|, \ \forall \tilde{q}_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\lambda_{\min}\{K_p K_{p_c}\} > k_g$$
$$\lambda_{\min}\{K_p\} > k_h$$

with $k_h = \frac{2k'}{\mathbf{Sat}\left(\frac{2k'\lambda_{\min}\{K_{p_c}\}}{k_g}\right)}$, the origin of the closed-loop system (15)–(16) is locally exponentially stable, and therefore, the equilibrium point of (13) is locally exponentially stable. Besides $|\tau_i(t)| \leq \tau_i^{\max}$ for all $i = 1, 2, ..., n$ and $t \geq 0$. $\diamond$

Proof. By following similar steps to those given in [20], by means of the singular perturbation theory [31], it is possible to prove Proposition 1.

5 Conclusions

In this paper, we propose a saturated nonlinear PID controller which, in fact, results from the practical implementation of the classical PID controller, by considering the natural saturations of the electronics of the control computer and of the servo drivers, and the actuator torque constraints. The stability analysis of the closed-loop system can be carried out by using the singular perturbation theory; thus, we conclude local exponential stability of the equilibrium point of the closed-loop system. It is also guaranteed that, regardless of initial conditions, the delivered actuator torques evolve inside permitted limits.

References

1. S. Arimoto, and F. Miyazaki, "Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability, in M. Brady and R.P. Paul (Ed.)",

Robotics Researches: First International Symposium, MIT press, Cambridge, MA., 783–799 (1984).
2. S. Arimoto, T. Naniwa, and H. Suzuki, "Asymptotic stability and robustness of PID local feedback for position control of robot manipulators", *Proc. International Conference on Automation Robotics and Computer Vision ICARCV '90*, Singapore. 382–386 (1990).
3. R. Kelly, "Regulation of Robotic Manipulators: Stability Analysis via the Lyapunov's First Method", *Internal report*, CICESE, Ensenada, B.C., Mexico (1995).
4. R. Kelly, "A Tuning procedure for stable PID control of robot manipulators", *Robotica*, **13** (2), 141–148 (1995).
5. R. Ortega, A. Loria, and R. Kelly, "A semiglobally stable output feedback PI^2D regulator for robot manipulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40** (8), 1432–1436 (1995).
6. J. Alvarez-Ramirez, I. Cervantes and R. Kelly, "PID regulation of robot manipulators: stability and performance", *Systems and Control Letters*, **41**, 73–83 (2000).
7. R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría, *Control of Robot Manipulators in Joint Space* (Springer–Verlag, London, 2005).
8. J. L. Meza, V. Santibañez and R. Campa, "An Estimate of the Domain of Attraction for the PID Regulator of Manipulators", *International Journal of Robotics and Automation*, **22** (3), 187–195 (2007).
9. R. Kelly, and V. Santibañez, "A class of global regulators with bounded control actions for robot manipulators", *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, Kobe, Japan, 3382–3387 (1996).
10. R. Colbaugh, E. Barany and K. Glass, "Global regulation of uncertain manipulators using bounded controls", *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Albuquerque, USA, 1148–1155 (1997a).
11. R. Colbaugh, E. Barany and K. Glass, "Global regulation of uncertain manipulators using bounded controls", *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Albuquerque, USA, 86–91 (1997b).
12. A. Loria, R. Kelly, R. Ortega, and V. Santibañez, "On global output feedback regulation of Euler–Lagrange systems with bounded inputs" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **42**, 1138–1143 (1997).
13. V. Santibañez, and R. Kelly, "On Global regulation of robot manipulators: saturated linear state feedback and saturated linear output feedback", *European Journal of Control*, **3**, 104–113 (1997).
14. V. Santibañez, and R. Kelly, "A New set-point controller with bounded torques for robot manipulators", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **45**, 126–133 (1998b).
15. E. Zergeroglu, W. Dixon, A. Behal and D. Dawson, "Adaptive set-point control of robotic manipulators with amplitude–limited control inputs", *Robotica*, **18**, 171–181 (2000).
16. A. Zavala–Rio and V. Santibañez, "Simple extensions of the PD–with–gravity–compensation control law for robot manipulators with bounded inputs", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **14** (5), 958–965 (2006).
17. A. Zavala-Rio and V. Santibanez, "A natural saturating extension of the PD–with–desired–gravity compensation control law for robot manipulators with bounded inputs," *IEEE Transactions on Robotics*, **23** (2), 386-391 (2007).
18. W. E. Dixon W.E., "Adaptive regulation of amplitude limited for robot manipulators with uncertain kinematics and dynamics", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52** (3), 488–493 (2007), *Proc. of American Control Conference*, Boston MA, 3839–3844 (2004).

19. J. Alvarez-Ramirez, R. Kelly and I. Cervantes, "Semiglobal stability of saturated linear PID control for robot manipulators", *Automatica*, **39**, 989–995 (2003).
20. J. Alvarez-Ramirez, V. Santibáñez and R. Campa, "Stability of Robot Manipulators under Saturated PID Compensation", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, to appear (2008).
21. S. Arimoto, "Fundamental problems of robot control: Part I, Innovations in the realm of robot servo–loops", *Robotica*, **13**, 19–27 (1995).
22. R. Kelly, "Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43** (7), 934–938 (1998).
23. V. Santibañez, and R. Kelly, "A class of Nonlinear PID Global regulators for robot manipulators", *Proc. of 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Bélgica, 3601–3606 (1998a).
24. J. L. Meza, and V. Santibáñez, "Analysis via passivity theory of a class of nonlinear PID global regulators for robot manipulators", *Proc. of the IASTED International Conference, Robotics and Applications RA'99, U.S.A.*, 288–293 (1999).
25. R. Gorez, "Globally stable PID-like control of mechanical systems" *Systems and Control Letters*, **38**, 61–72 (1999).
26. J. L. Meza, V. Santibañez and V. Hernandez, "Saturated Nonlinear PID Global Regulator for Robot Manipulators: Passivity Based Analysis", *Proc. of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, (2005).
27. M. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control* (John Wiley and Sons, 1989).
28. D. Koditschek, "Natural motion for robot arms", *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV., 733–735 (1984).
29. R. Ortega, and M. Spong, "Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial", *Automatica*, **25** (6), 877–888 (1989).
30. J. J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, (Reading, MA, Addison–Wesley 1998).
31. H. Khalil, *Nonlinear Systems*, (Prentice Hall, 2002).
32. R. Kelly and J. Moreno, "Learning PID Structures in an Introductory Course of Automatic Control", *IEEE Transactions on Education*, **44** (4), 373–376 (2001).

Control Discontinuo

Funciones de Lyapunov para algoritmos de modos deslizantes de segundo orden: Un enfoque disipativo

Marisol Osorio[1] y Jaime Moreno[2]

[1] Universidad Pontificia Bolivariana, Escuela de Ingeniería, Grupo de Investigación en Automática y Diseño, Cir 1 No. 70-01 B.11 Medellín, Colombia
marisol.osorio@upb.edu.co,
[2] Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)
Instituto de Ingeniería, Edificio 12, Circuito Exterior, 04510
México D.F.,México
JMorenoP@iingen.unam.mx

Resumen Este artículo presenta el análisis desde el punto de vista disipativo del algoritmo *Super Twisting*, una reconocida metodología para obtener modos deslizantes de segundo orden (MDSO) que se utiliza ampliamente en la literatura para el diseño de controladores, observadores y diferenciadores exactos. El análisis disipativo desemboca en la obtención de funciones fuertes de Lyapunov para el algoritmo *Super Twisting*, lo que no ha sido reportado hasta el momento en la literatura, y que comporta la posibilidad de disponer de muchas nuevas herramientas de análisis y diseño en el área de investigación en Modos Deslizantes de Orden Superior.

Key words: Modos Deslizantes, *Super Twisting*, Disipatividad, Análisis de Lyapunov

1 Introducción

Las estrategias de modos deslizantes para control y observación se utilizan ampliamente debido a su convergencia en tiempo finito y robustez ante perturbaciones. La teoría y la práctica del control por modos deslizantes ha sido profundamente estudiado [1,2,3,4,5,6,7,8]. La observación basada en algoritmos de modos deslizantes es un tópico de creciente interés [9,10,11,12,13]. Normalmente, los modos deslizantes se obtienen por inyección de un término discontinuo dependiente del error de la salida. Esta inyección se diseña tal que las trayectorias permanecen en una superficie en el espacio de error, en lo que se conoce como modo deslizante [8]. Este procedimiento permite el rechazo de algunas clases de perturbaciones e incertidumbres [12].
Levant [5,6] define el orden de los modos deslizantes por medio de un sistema dinámico suave con una función suave de salida σ, realimentado a través de un sistema dinámico que puede ser discontinuo, con la salida del lazo cerrado forzada a ser cero. Entonces, dado que las sucesivas derivadas con respecto al tiempo

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 297-306

$\sigma, \dot{\sigma}, \ldots, \sigma^{(r-1)}$ son funciones continuas de las variables de espacio de estado del sistema en lazo cerrado, y el conjunto $\sigma = \dot{\sigma} = \ldots = \sigma^{(r-1)} = 0$ es no vacío y consiste en trayectorias en el sentido de Filippov [14], se dice que el movimiento en el conjunto $\sigma = \dot{\sigma} = \ldots = \sigma^{(r-1)} = 0$ es un modo deslizante de . Se supone que la -ésima derivada $\sigma^{(r)}$ es discontinua o no existe.

El modo deslizante estándar es el de primer orden (i.e. $\dot{\sigma}$ es discontinuo) [5,6]. Se sabe que este modo deslizante es robusto y muy preciso con respecto a varias clases de perturbaciones internas y externas [7], pero está restringido al caso en que el grado relativo de la salida es 1, i.e., la inyección discontinua aparece ya en $\dot{\sigma}$. En este caso, el suicheo de alta frecuencia que presenta la salida en el modo deslizante puede ocasionar un efecto conocido como [2,7]. Los modos deslizantes de orden superior (HOSM, por sus siglas en inglés) aparecen en algunas ocasiones en sistemas con control por modos deslizantes tradicional, y en otras ocasiones son introducidos deliberadamente, dado que se ha encontrado que los HOSM convergentes en tiempo finito preservan las características de los modos deslizantes de primer orden y pueden mejorarlos, si se diseñan apropiadamente, en el sentido de eliminar el [5,6].

Para los modos deslizantes de primer orden es común usar funciones de Lyapunov para estudiar estabilidad, robustez y convergencia en tiempo finito [8,12,13]. Hasta ahora, no habían sido desarrollados tratamientos similares para HOSM. En vez de ello, es común utilizar métodos basados en homogeneidad o curvas límite de trayectoria para estudiar convergencia [3,10,11].

En [10,11] se propone una estrategia de observación en modos deslizantes de segundo orden (MDSO) basada en el algoritmo [3] . Allí, la convergencia en tiempo finito se comprueba mediante el uso de una curva límite de trayectorias, y se analiza la robustez de la estrategia frente a perturbaciones acotadas. Aquí se analiza de forma genérica un algoritmo similar, de manera que podría ser aplicado tanto a control como a observación. Se estudia el algoritmo desde el punto de vista disipativo, lo que permite obtener una función de Lyapunov. La convergencia en tiempo finito se asegura entonces mediante la función de Lyapunov hallada a partir del análisis de disipatividad. El uso de funciones de Lyapunov permite además la simplificación del método de diseño pues hace posible obtener funciones explícitas en términos de características conocidas del sistema y las perturbaciones.

En lo que sigue, se dan algunas bases sobre Sistemas Disipativos (Sección **2**) y se presenta el análisis disipativo de una estructura lineal básica (Sección **3**), como introducción al análisis disipativo del algoritmo en sí (Sección **4**). Por último, se dan algunas conclusiones al respecto.

2 Sistemas Disipativos

Considérese un sistema dinámico no lineal

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases} \tag{1}$$

con entradas $u \in \Re^m$, salidas $y \in \Re^p$ y estados $x \in \Re^n$.
Para el estudio de sus características disipativas, Σ_{NL} se define conjuntamente con una función $\omega(u(t), y(t))$, llamada *Tasa de Suministro*, tal que $\int_{t_1}^{t_0} |\omega(t)|\, dt < \infty$ para cualquier $(t_0, t_1) \in \Re_2^+$, i.e. ω es localmente integrable.

Definition 1. *[15] Un sistema dinámico Σ_{NL}, con tasa de suministro $\omega(u(t), y(t))$, es* Disipativo *si existe una función escalar no negativa $V(x)$, llamada* Función de Almacenamiento, *tal que para todo $(t_0, t_1) \in \Re_2^+$, x_0 y $x_1 \in \Re^n$, y $u \in \Re^m$,*

$$V(x_0) + \int_{t_1}^{t_0} \omega(t)\, dt \geq V(x_1). \tag{2}$$

x_0 son las condiciones iniciales del estado de Σ dadas en $t = t_0$ y x_1 es el estado alcanzado en el tiempo t_1, con condiciones iniciales x_0, ante una entrada u. La inecuación (2) se conoce como Desigualdad de Disipación. *Es interesante anotar que si $V(x)$ es diferenciable para todo $x \in \Re^n$ y $u \in \Re^m$, la desigualdad de disipación es equivalente a*

$$\dot{V}(x, u) \leq \omega(y, u). \tag{3}$$

Cuando la función de almacenamiento $V(x)$ asociada a un sistema disipativo tiene un mínimo local fuerte en un punto de equilibrio del sistema, entonces ese punto de equilibrio es estable.

Definition 2. *Un sistema lineal dinámico Σ_L*

$$\Sigma_L = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{4}$$

es Disipativo en los Estados *(DE) con respecto a una* tasa de alimentación *$\omega(y, u)$ si existe una* función de almacenamiento *positiva definida $V(x) = x^T P x$, de tal manera que a lo largo de cualquier trayectoria del sistema se satisface que*

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq \omega(y(t), u(t)) - \epsilon x^T P x. \tag{5}$$

Si la función de tasa de alimentación se define

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}. \tag{6}$$

se dice que Σ_L es (Q, S, R)-DE.

En ese caso, la condición (5) se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0, \tag{7}$$

con P simétrica y positiva definida, y $\epsilon > 0$ [16].
Para una clase de operadores estáticos definidos por medio de funciones multivaluadas:

Definition 3. *Una no linealidad sin memoria, multivaluada, variante en el tiempo* $\psi : [0, \infty) \times \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^m$,

$$y \in \psi(t, u) \ , \tag{8}$$

tal que $0 \in \psi(t, 0)$, *es* (Q, S, R)-Disipativa *((Q, S, R)-D), si para toda* $t \geq 0$, *y* $u \in \mathbf{R}^q$ *se cumple la desigualdad de disipatividad:*

$$\omega(y, u) = y^T Q y + 2 y^T S u + u^T R u \geq 0. \tag{9}$$

Es de interés, para lo que sigue, considerar la relación entre la disipatividad y la estabilidad en sistemas interconectados que incluyen no linealidades multivaluadas, para lo que se establece el siguiente Lema.

Lemma 1. *Considere el sistema realimentado en la forma de Lur'e:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \ , \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx, \quad u \in -\psi(t, y) \ , \end{aligned} \tag{10}$$

y suponga que $\psi(t, y)$ *es una función vectorial multivaluada de dimensión* q *que se asume dependiente de* σ, *semicontinua por arriba, medible en el sentido de Lebesgue y localmente acotada. El conjunto al que pertenece la salida de* ψ *es no vacío, compacto y convexo. Si el sistema lineal* (C, A, B) *es* $(-R, S^T, -Q)$-*DE, y* ψ *es* (Q, S, R)-*D, entonces el punto de equilibrio* $x = 0$ *de (10) es Uniforme, Global y Exponencialmente Estable (UGEE).*

Prueba. La hipótesis sobre $\psi(t, y)$ asegura la existencia de soluciones para (10) [17]. Supóngase que (7) se satisface con $(-R, S^T, -Q)$. Sea $V(x) = x^T P x$ una candidata de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado. La derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias solución de (10) es $\dot{V} = (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)$, lo que también se puede escribir, con (7) y la última ecuación en (10):

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -C^T R C & C^T S^T \\ SC & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} - \epsilon x^T P x.$$

Como $u \in -\psi$ y $y = Cx$, lo anterior se puede escribir:

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} - \epsilon V(x)$$

de lo que se sigue que

$$\dot{V} \leq -\epsilon V(x) \tag{11}$$

dado que ψ es (Q, S, R)-D. De la teoría de estabilidad de Lyapunov se puede concluir que el origen de (10) es Universal, Global y Asintóticamente Estable. Para probar que la estabilidad del sistema es además exponencial, se recuerda que $V(x)$ es una función positiva definida cuadrática $x^T P x$ que satisface

siempre que $\lambda_{min}(P)x^Tx \leq V(t,x) \leq \lambda_{max}(P)x^Tx$. Con esto y (11), utilizando el conocido Lema de Comparación [18] se puede concluir que $\|x\| \leq \left(\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}\right)\|x(t_0)\|\, e^{-(\epsilon/2)(t-t_0)}$ y que, por ende, el origen de (10) es UGEE. ■

El Lema 1 es una generalización del teorema del círculo para sistemas multivaluados y establece las condiciones que permiten determinar su estabilidad, con base en condiciones de disipatividad, cuando los sistemas se pueden expresar en la forma de Lur'e. Dado que el sistema incluye no linealidades multivaluadas, es posible que la inclusión diferencial que lo representa tenga múltiples soluciones, en cuyo caso el Lema 1 implica que todas tienden al origen y $V(x) = X^TPx$ es una función de Lyapunov .

3 Análisis Disipativo de una Estructura Lineal Básica

Un reconocido algoritmo para control y observación que usa Modos Deslizantes de Segundo Orden (MDSO) es el llamado [7]

$$\Xi : \begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 |x_1|^{1/2} \operatorname{sign}(x_1) + x_2 + \varrho_1(x,t) \\ \dot{x}_2 = -k_3 \operatorname{sign}(x_1) + \varrho_2(x,t) \end{cases} \tag{12}$$

donde x_i son variables de estado escalares, k_i son ganancias a ser diseñadas y ϱ_i son términos de perturbación. Las soluciones de la inclusión diferencial son trayectorias en el sentido de Filippov [14]. Obsérvese que, a pesar de que sus propiedades son muy diferentes, el algoritmo puede ser visto como una versión no lineal del siguiente algoritmo lineal básico:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = -k_2 x_1 + x_2 + \varrho_1(x,t) \\ \dot{x}_2 = -k_4 x_1 + \varrho_2(x,t) \ , \end{cases} \tag{13}$$

Es posible estudiar este algoritmo desde el punto de vista disipativo y corroborar que es robusto ante perturbaciones acotadas de la forma

$$\begin{aligned} |\varrho_1| &\leq \delta_3 |x_1| \ , \\ |\varrho_2| &\leq \delta_4 |x_1| \ , \end{aligned} \tag{14}$$

para constantes $\delta_3, \delta_4 > 0$. Obsérvese que (13) es un sistema en la forma de Lur'e que tiene en la realimentación un bloque no lineal ψ sin memoria, cuya entrada es x_1 y cuyas salidas son ϱ_1 y ϱ_2: $\psi(x_1) = \left[\varrho_1 \ \varrho_2\right]^T$. Definiendo $\omega_1 = x_1^2 - \frac{\varrho_1^2}{\delta_3^2}$ y $\omega_2 = x_1^2 - \frac{\varrho_2^2}{\delta_4^2}$, de (14) es posible concluir que

$$W_2(\psi, x_1) = \omega_1 + \omega_2 = \begin{bmatrix} \psi \\ x_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ x_1 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{15}$$

W_2 es una función de alimentación con respecto a la cual ψ es disipativo, o de otra forma, ψ es (Q,S,R)-D con $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_3^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta_4^2} \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $R = 2$. Para cumplir

el Lema 1 es necesario encontrar $V(x) = x^T Px$, k_2 y k_4 tal que el sistema lineal de lazo abierto con entradas u_1 y u_2

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}_1 = -k_2 x_1 + x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -k_4 x_1 + u_2 \\ y = x_1 \ , \end{cases} \tag{16}$$

sea $(-R, S^T, -Q)$-DE, esto es, que

$$W_1(x,u) - \dot{V}(x,u) \geq \epsilon x^T Px \tag{17}$$

para algún $\epsilon > 0$ con

$$\dot{V}(x,u) = x^T \left(P \begin{bmatrix} -k_2 & 1 \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_2 & 1 \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix}^T P \right) x + 2u^T Px \tag{18}$$

$$W_1(y,u) = W_1(x_1,u) = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_4^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Una posible elección de P, k_2 y k_4 para que (17) se cumpla es:

$$P = \begin{bmatrix} 3\frac{\delta_4}{\delta_3^2} & -\frac{1}{2\delta_3^2} \\ -\frac{1}{2\delta_3^2} & \frac{\sqrt{3}-1}{4\delta_3\delta_4} \end{bmatrix},$$

$$k_2 = \left[\frac{\delta_3^2 + 16\delta_3^4 + 82\delta_4^2}{8\delta_3^2} + \frac{(11-\sqrt{3})\delta_4^2}{2(\sqrt{3}-1)\delta_3^2} \right] \frac{\sqrt{3}-1}{6\sqrt{3}-10} \quad \text{y} \quad k_4 = \frac{4\delta_4 k_2}{(\sqrt{3}-1)\delta_3} + \frac{(11-\sqrt{3})\delta_4^2}{2(\sqrt{3}-1)\delta_3^2}. \tag{20}$$

De esta forma, analizando la disipatividad de (13), se ha obtenido una función de Lyapunov para Σ, y además, del Lema 1 es posible concluir que el origen de Σ es UGEE.

4 Análisis Disipativo del Algoritmo *Super Twisting*

Defínase $\zeta^T = \left[|x_1|^{1/2} \operatorname{Signo}(x_1) \ , \ x_2 \right]$. De esta forma, (12) puede escribirse

$$\begin{aligned} \Xi \ : & \begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \frac{1}{2|x_1|^{1/2}} \left(-k_1 x_1^{1/2} \operatorname{Signo}(x_1) + x_2 + \varrho_1(x) \right) \\ \dot{\zeta}_2 = -k_3 \operatorname{Signo}(x_1) + \varrho_2(x) \end{cases} \\ & = \frac{1}{|\zeta_1|} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{2}\zeta_1 + \frac{\zeta_2}{2} \\ -k_3\zeta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{2} \\ \varrho_2 |\zeta_1| \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{|\zeta_1|} \{ A\zeta + B\bar{\varrho} \} \end{aligned} \tag{21}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -k_3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\varrho} = \begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{2} \\ \varrho_2 |\zeta_1| \end{bmatrix} \tag{22}$$

Escrito así, se hace evidente la semejanza estructural entre (12) y (13). De esta forma, el análisis desde el punto de vista disipativo de (12) puede hacerse de manera similar a como se hizo para (13).
Es posible entonces definir un sistema Ξ_L dado por $A\zeta + B\bar{\varrho}$. Este es un sistema en la forma de Lur'e cuya realimentación consiste en el bloque no lineal sin memoria con entrada ζ_1 y salida $\bar{\varrho}$. Supóngase que los términos de perturbación en (12) están dados por $|\varrho_1| \leq \delta_1 |x_1|^{1/2}$ y $|\varrho_2| \leq \delta_2$, lo que equivale a

$$2|\bar{\varrho}_1| \leq \delta_1 |\zeta_1| \ , \ \bar{\varrho}_2 \leq \delta_2 |\zeta_1| \ , \tag{23}$$

Definiendo $\omega_1 = \zeta_1^2 - \frac{\bar{\varrho}_1^2}{\delta_1^2}$ y $\omega_2 = \zeta_1^2 - \frac{\bar{\varrho}_2^2}{\delta_2^2}$, de (23) es posible concluir que

$$W_2(\bar{\varrho}, \zeta_1) = \omega_1 + \omega_2 = \begin{bmatrix} \bar{\varrho} \\ \zeta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varrho} \\ \zeta_1 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{24}$$

W_2 es una función de alimentación con respecto a la cual $\bar{\varrho}$ es disipativo, o de otra forma, $\bar{\varrho}$ es (Q, S, R)-D con $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta_2^2} \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $R = 2$. Se busca entonces $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$, k_1 y k_3 tal que el sistema lineal de lazo abierto con entradas u_1 y u_2

$$\Xi_L : \begin{cases} \dot{\zeta}_1 = -\frac{k_1}{2}\zeta_1 + \frac{\zeta_2}{2} + u_1, \ \ \dot{\zeta}_2 = -k_3\zeta_1 + u_2 \\ y = \zeta_1 \end{cases} \tag{25}$$

sea $(-R, S^T, -Q)$-DE, esto es, que

$$W_1(\zeta, u) - \dot{V}_L(\zeta, u) \geq \epsilon \zeta^T P \zeta \tag{26}$$

para algún $\epsilon > 0$, con $\dot{V}_L$ la derivada de V en las trayectorias de Ξ_L

$$\dot{V}_L(\zeta, u) = \zeta^T \left(PA + A^T P\right)\zeta + 2u^T P\zeta \tag{27}$$

y

$$W_1(y, u) = W_1(\zeta_1, u) = \begin{bmatrix} \zeta \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ u \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Una posible elección de P, k_1 y k_3 para que (26) se cumpla es:

$$P = \begin{bmatrix} 3\frac{\delta_2}{\delta_1^2} & -\frac{1}{4\delta_1^2} \\ -\frac{1}{4\delta_1^2} & \frac{\sqrt{2}-1}{4\delta_1\delta_2} \end{bmatrix}, \ k_1 = \left[\frac{2\delta_1^3}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1}\left(\frac{167\sqrt{2}-147}{16\sqrt{2}-16}\right) + \frac{\delta_1}{8\delta_2}\right]\left(\frac{12\sqrt{2}-13}{4\sqrt{2}-4}\right) \text{ y}$$

$$k_3 = \frac{\left[(\sqrt{2}-1)(32\delta_1^2+2)+\delta_2^2(171\sqrt{2}-147)\right](12\sqrt{2}-13)+32\delta_2^2(11-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2}{128\delta_1^2(\sqrt{2}-1)^3}. \tag{29}$$

Si se divide (26) entre $|\zeta_1|$, la desigualdad no se altera. Obsérvese que $\dot{V}(\zeta,u) = \frac{\dot{V}_t}{|\zeta_1|}$ es precisamente la derivada de la función de Lyapunov propuesta, pero hallada en las trayectorias del sistema no lineal Ξ. Con ello, $W(\zeta,u) = \frac{W_1}{|\zeta_1|}$ es una función de alimentación con respecto a la cual Ξ es disipativo, y por ende, estable.

Nota 1 *Después de algún trabajo algebraico, es posible escribir en términos de los estados originales x_1 y x_2 a $V(x)$, lo que pone de manifiesto que es continua pero no diferenciable:*

$$\dot{V(x)} = \frac{1}{4\delta_1^2}\left[|x_1|\left(\frac{12\delta_1}{\delta_1}-1\right)+x_2^2\left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{\delta_2}-\frac{1}{\delta_1}\right)+(|x_1|\,\text{Signo}\,(x_1)-x_2)^2\right]. \tag{30}$$

con lo que se requiere para su tratamiento alguna versión no suave de la teoría de Lyapunov (Véase [19] o el artículo tutorial reciente [20]). Nótese que la versión usual para funciones de Lyapunov lipschitzianas [14,17,21] no es de utilidad aquí porque $V(x)$ no es localmente Lipschitz. Por ende, no se debería usar el Gradiente Generalizado de $V(x)$ sino su Subdiferencial Proximal [19]. En este caso, sin embargo, es posible usar un método más simple debido a que las trayectorias de estado $\varphi(t,x_0)$ de la inclusión diferencial (12) son funciones absolutamente continuas y por ende $V(\varphi(t,x_0))$ es una función continua del tiempo. Debido a la no lipschitcidad de $V(x)$, no es posible asegurar la continuidad absoluta de $V(\varphi(t,x_0))$, ni su diferenciabilidad. Sin embargo, $V(x)$ es continuamente diferenciable, excepto en el conjunto $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = 0\}$. Sin embargo, las trayectorias del sistema (12) cruzan la superficie de S y no pueden permanecer en ese conjunto, excepto cuando alcanzan el origen $x = 0$. Esto significa que $V(\varphi(t,x_0))$ es diferenciable para casi todo t, y en los valores en que es diferenciable, la derivada puede ser calculada en la forma usual, aplicando la regla de la cadena. O sea que es posible aplicar el teorema de Lyapunov considerando solamente los puntos en que $V(x)$ es diferenciable.

Nótese adicionalmente, de (26) y el Lema 1, que $\dot{V}(\zeta,u) \leq -\frac{\epsilon V(\zeta)}{|\zeta_1|}$. Como $\zeta_1 = |x_1|^{1/2}\,\text{Signo}(x_1)$, $\dot{V} \leq -\frac{\epsilon V}{|x_1|^{1/2}}$. Como $V = \zeta^T P \zeta$, se puede afirmar que es acotada: $\lambda_{\text{mín}}\{P\}\,\|\zeta\|_2^2 \leq V \leq \lambda_{\text{máx}}\{P\}\,\|\zeta\|_2^2$, con $\|\zeta\|_2^2 = |x_1| + x_2^2$ la norma Euclideana de ζ. Dado que $|x_1|^{1/2} \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{1/2}(x)}{\lambda_{\text{mín}}^{1/2}\{P\}}$ se concluye que $\dot{V} \leq -\gamma V^{1/2}$, donde $\gamma = \epsilon\lambda_{\text{mín}}^{1/2}\{P\}$. Ya que la solución de la ecuación diferencial $\dot{v} = -\gamma v^{1/2}$ con condiciones iniciales $v(0) = v_0 \geq 0$ está dada por

$$v(t) = \left(v_0^{1/2} - \frac{\gamma}{2}t\right)^2 \tag{31}$$

resulta, del principio de comparación [18], que $V(t) \leq v(t)$ cuando $V(\zeta_0) \leq v_0$. De (31) se obtiene que $V(\zeta(t))$, $\zeta(t)$, y por ende $x(t)$, convergen a cero en tiempo finito y alcanza ese valor a lo sumo después de $T = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\gamma}$ unidades de

tiempo.
En este punto, es interesante analizar las dos estructuras que se han estudiado: Un algoritmo lineal y uno no lineal MDSO *Super Twisting*. Es posible observar dos diferencias notables entre ellos. Primero, sus propiedades de convergencia son diferentes. Mientras que el sistema lineal converge *exponencialmente*, las trayectorias del algoritmo MDSO *Super Twisting* convergen en *tiempo finito*. Esto es debido a que el algoritmo MDSO no es localmente Lipschitz en el origen, lo que significa que su comportamiento alrededor del origen es muy fuerte, en comparación con el caso lineal. Por otro lado, los términos de corrección lineal son más fuertes de los del algoritmo MDSO lejos del origen. Estas diferencias causan un contraste adicional: Las perturbaciones que cada algoritmo es capaz de manejar son diferentes. Las que el sistema lineal puede soportar crecen linealmente, son mas fuertes lejos del origen que cerca de él, mientras que lo contrario ocurre con el *Super Twisting*. En ese sentido, se trata de dos herramientas con utilidades diferentes que podrían ser combinadas más adelante utilizando el análisis de Lyapunov que se ha desarrollado aqui para su estudio.

5 Conclusiones

En este artículo se propone por primera vez una forma estructurada de hallar funciones de Lyapunov fuertes para una clase de algoritmos en modos deslizantes de segundo orden: El algoritmo *Super Twisting*. El método para hallar estas funciones se obtiene por medio de la fuerte analogía que se puede encontrar entre el algoritmo MDSO *Super Twisting* y una estructura básica lineal. El algoritmo *Super Twisting* es ampliamente usado para el diseño de controladores, observadores y diferenciadores exactos, y presenta importantes propiedades de convergencia en tiempo finito y robustez ante perturbaciones fuertes. Comparado con los modos deslizantes de primer orden, que también poseen esas propiedades, las trayectorias obtenidas mediante *Super Twisting* son mas suaves, y evitan el fuerte efecto de *chattering* que se presenta en los modos deslizantes clásicos.
Se espera que disponer de funciones de Lyapunov permita profundizar mucho más en el estudio del *Super Twisting* y otros algoritmos de modos deslizantes de orden superior, de manera que sea posible entender más completamente su naturaleza y propiedades y disponer de mejores herramientas de diseño.

6 Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado en parte por DGAPA-UNAM, proyecto PAPIIT IN112207, y CONACyT, Proyecto 51244. Los autores desean agradecer a la Universidad Pontificia Bolivariana y Colciencias por el apoyo dado a Marisol Osorio para realizar estancias en la UNAM, así como a los revisores anónimos. cuyos comentarios fueron de enorme utilidad.

Referencias

1. G Bartolini, Ferrara A, E. Usai, y V. Utkin.: On multi-input chattering-free second-order sliding mode control. IEEE Transactions on Automatic Control. 45, 1711–1719 (2000)
2. I. Boiko, L. Fridman, y Castellanos M.L.: Analysis of second-order sliding-mode algorithms in the frequency domain. IEEE Transactions on Automatic Control 49, 946–950 (2004)
3. A. Levant.: Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. International Journal of Control, 58:1247–1263, (1993)
4. A. Levant.: Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence. IEEE Transactions on Automatic Control, 46:1447–1451, (2001)
5. A. Levant.: Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, 50:1812–1816, (2005)
6. A. Levant.: Principles of 2-sliding mode design. Automatica, 43:576–586, (2007)
7. A. Levant and L. Fridman.: Higher order sliding modes. In: Sliding Mode Control in Engineering. Marcel Dekker, pages 53–101. (2002)
8. V. Utkin.: Sliding Modes in Control and Optimization. Springer-Verlag, (1992)
9. H.H. Choi and K. Ro.: LMI-based sliding-mode observer design method. IEEE Proceedings on Control Theory Applications, 152:113–115, (2005)
10. J. Davila, L. Fridman, and A. Levant.: Second-order sliding-modes observer for mechanical systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 50(11):1785–1789. (2005)
11. J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak.: Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. International Journal of Control. 79(10):1251–1262, (2006)
12. Ch. Tan and Ch. Edwards.: An LMI approach for designing sliding mode observers. International Journal of Control, 74:1559–1568, (2001)
13. B.L. Walcott and S.H. Żak.: State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. IEEE Trans. Automatic Control, 32:166–169, (1987)
14. A. F. Filippov.: Differential Equations with Discontinuous Righthand side. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, (1988)
15. J. C. Willems.: Dissipative dynamical systems, part I: General theory. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 45:321–351, (1972)
16. D. J. Hill and P. J. Moylan.: Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. Journal of the Franklin Institute, 309:327–357, (1980)
17. A. Baccioti and L. Rosier.: Liapunov functions and stability in control theory. Springer-Verlag, 2nd edition, (2005)
18. H. K. Khalil.: Nonlinear Systems. Prentice–Hall, Upsaddle River, New Jersey. 3rd. edition, (2002)
19. F.H. Clarke, Y. Ledyaev, R.J. Stern, and P.R. Wolenski.: Nonsmooth analysis and control theory. Springer-Verlag, New York, (1998)
20. J. Cortés.: Discontinuous dynamical systems. a tutorial on solutions. nonsmooth analysis, and stability. IEEE Control Systems Magazine, 28(3):33–73, (2008)
21. Y. Orlov.: Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. SIAM Journal of Control and Optimization, 43(4):1253–1271, (2005)

Evaluación Experimental de Controladores no Lineales vía Linealización Exacta y Modos Deslizantes Aplicados en un Sistema de Levitación Magnética*

Alfredo Camarillo, Javier Ollervides, Alejandro Dzul y Víctor Santibáñez

Instituto Tecnológico de la Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación, Calz. Cuauhtémoc y Blvd. Revolución, Torreón, Coah., México
http://www.itlalaguna.edu.mx
{jacamarillo,dzul}@faraday.itlalaguna.edu.mx,{jollervi,vsantiba}@itlalaguna.edu.mx

Resumen Este artículo considera el problema de regulación y seguimiento para un sistema de levitación magnética. Es bien sabido que el problema de control para este tipo de sistema es complicado debido a las no linealidades asociadas con la dinámica electromecánica. En este artículo se presenta la evaluación experimental de dos controladores no lineales, basados en las metodologías de linealización exacta y modos deslizantes, ambas estrategias de control son comparadas, obteniéndose mejores resultados experimentales con la metodología de modos deslizantes.

1. Introducción

El diseño de leyes de control para sistemas de levitación magnética no es reciente, sin embargo existe el interés de mejorar el desempeño de éstas, debido a que este principio es usado en algunos sistemas industriales como: el tren de suspensión magnética de alta velocidad, levitación de modelos de túnel de viento, aislamiento de vibración de máquinas sensibles, rodamientos magnéticos, guiado de cohetes , y levitación de losas metálicas durante el proceso de manufactura.

Es bien sabido que este tipo de sistemas tiene un comportamiento inestable y su modelo matemático es descrito por ecuaciones diferenciales no lineales. Las leyes de control más comunes encontradas en la literatura para este tipo de sistema son: leyes de control lineal, linealización por realimentación (linealización exacta), modos deslizantes, control H_∞, "backstepping" y recientemente se introdujo la metodología IDA-PBC. En este trabajo se presenta la evaluación experimental de las metodologías de linealización exacta y modos deslizantes, las cuales fueron desarrolladas desde la perspectiva de [1] y [2], pero también se consultaron las siguientes referencias: en [4] los autores describen y proponen

* Este trabajo fue financiado por CONACYT y DGEST.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 307-316

un modelo no lineal para el sistema de suspensión magnética, además proponen una ley de control no lineal basada en geometría diferencial (linealización exacta). La misma estrategia de control (linealización exacta) fue utilizada en [5], donde los autores añaden un observador para estimar la velocidad de la esfera. Continuando con la linealización exacta, en [6] es considerada la libertad en la transformación de coordenadas como una ventaja por encima de disturbios impulsivos en el sistema. En [7], se propone un controlador por modos deslizantes considerando un simple modelo lineal. Los controladores evaluados en este artículo, tienen un mejor desempeño que los presentados en [4], [5] y [7]. Además es importante mencionar que estos ultimos solo consideran el caso de seguimiento.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se presenta el modelo dinámico del sistema de levitación magnética. La Sección 3 está destinada a explicar las estrategias de control. En la sección 4 se describe brevemente la plataforma experimental. En la sección 5 se presentan los resultados experimentales y finalmente en la sección 6 se presentan las conclusiones.

2. Modelo Dinámico

Considérese el sistema de levitación magnética mostrado en la Figura 1, en el cual un electromagneto ejerce una fuerza de atracción para levitar una esfera metálica. Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff al circuito electromagnético y usando la segunda ley de Newton para modelar el desplazamiento de la esfera, se tienen la siguientes dinámicas [9]:

$$u = Ri + \frac{d}{dt}\left[L(y)i\right] \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = mg + \frac{1}{2}i^2\frac{\partial L(y)}{\partial y} \tag{2}$$

donde u es la tensión de alimentación del electromagneto, i denota la corriente en el electromagneto, g es la constante de gravedad, m es la masa de la esfera, R es la resistencia del alambrado, y es la distancia medida de la cara superior de la esfera con respecto a la cara inferior del electromagneto, c es el rango máximo de operación del sistema, y $L(y)$ es la inductancia variable del sistema, que puede ser representada como [3]:

$$L(y) = \frac{k}{y_0 + y} + L_\infty \tag{3}$$

Los parámetros k, L_∞, y y_0 son constantes positivas y forman parte del modelo (3), que reproduce el comportamiento dinámico de la inductancia del sistema, cuando la esfera está en levitación. Definiendo el sistema en espacio de estados como $x = [y \quad \dot{y} \quad i]^T$, y rescribiendo las ecuaciones (1) y (2) se tiene el siguiente

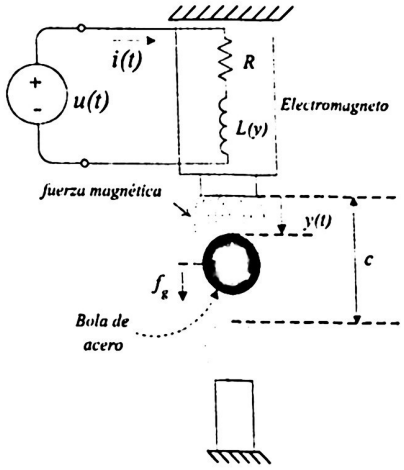


Figura 1: Sistema de levitación magnética

sistema no lineal expresado en la forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\frac{k}{2m}\frac{i^2}{[y_0+y]^2} + g \\ \frac{i[k\dot{y} - R[y_0+y]^2]}{k[y_0+y] + L_\infty[y_0+y]^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{y_0+y}{L_\infty[y_0+y]+k} \end{bmatrix} u \tag{4}$$

3. Estrategias de Control

3.1. Linealización Exacta [1,2,6]

Considérese el siguiente sistema de una entrada y una salida descrito por

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{5}$$

$$y = h(x) \tag{6}$$

donde $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ es el vector de estados, f y g son campos vectoriales suaves y $x = x^\circ$ es un punto de equilibrio, i.e. $f(x^\circ) = 0$. El problema de la linealización exacta es: dado el sistema (5), con $y = h(x)$, para la cual el sistema tiene un grado relativo $r = n$ (igual a la dimensión del espacio de estado), encontrar si es posible una realimentación $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ y una transformación de coordenadas $\xi = \phi(x)$, tal que el correspondiente sistema en lazo cerrado, usando la realimentación, en las nuevas coordenadas es lineal y controlable, como lo describe la siguiente ecuación:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \tag{7}$$

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 317-326

Entonces, si se encuentra una función $h(x)$ para la cual $r = n$, la linealización por realimentación está dada por

$$u = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} v \tag{8}$$

con la siguiente transformación de coordenadas

$$\xi = \left[h(x), L_f h(x), ..., L_f^{n-1} h(x)\right]^T \tag{9}$$

donde $L_f h(x), \ldots, L_g L_f^{n-1} h(x)$ son las derivadas de Lie [1].

Tomando como salida y (posición de la esfera), el sistema (4) tiene un grado relativo $r = 3$, por lo tanto la transformación de coordenadas está dada como

$$\xi_1 = h(x) = y \tag{10}$$

$$\xi_2 = L_f h(x) = \dot{y} \tag{11}$$

$$\xi_3 = L_f^2 h(x) = -\frac{k}{2m}\frac{i^2}{[y_0 + y]^2} + g \tag{12}$$

cuyas derivadas son

$$\dot{\xi}_1 = L_f h(x) = \xi_2 \tag{13}$$

$$\dot{\xi}_2 = L_f^2 h(x) = \xi_3 \tag{14}$$

$$\dot{\xi}_3 = L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) u \tag{15}$$

sutituyendo (8) en (15), se tiene el sistema descrito en (7), el cual es lineal y controlable en la forma de cadena integradores. Sobre el sistema lineal obtenido, se puede tomar v, como una realimentación de estados de tal manera que estabilice asintóticamente al sistema alrededor del equilibrio.

La ley de control, para el caso de regulación que se obtuvo, se desarrolló a partir de (8), y después de ciertas manipulaciones algebráicas se tiene la siguiente expresión

$$u = \frac{i\dot{y}L_\infty}{y_0 + y} + Ri - \frac{m}{k}\frac{[y_0 + y][L_\infty[y_0 + y] + k]}{i} v \tag{16}$$

donde v es la realimentación de estados y se expresa como

$$v = -k_0 e_1 - k_1 e_2 - k_2 e_3 + k_3 e_0 \tag{17}$$

con $e_1 = y - y_d$, $e_2 = \dot{y}$, $e_3 = \left[-\frac{k}{2m}\frac{i^2}{[y_0+y]^2} + g\right]$, y finalmente $e_0 = \int (y - y_d) dt$ es agregado para reducir el error de estado estacionario [2]. Las constantes k_0, k_1, k_2 y k_3 se determinan de tal manera que $|sI - (A - Bk)|$ sea Hurwitz, donde I es la matriz identidad.

La ley de control para el caso de seguimiento se expresa como [2]

$$u = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}(v + y_d^n) \tag{18}$$

donde y_d^n es la n-enésima derivada de la señal de referencia y_d. La ley de control para el caso de seguimiento se desarrolló a partir de (18) y se expresa como

$$u = \frac{i\dot{y}L_\infty}{y_0 + y} + Ri - \frac{m}{k}\frac{[y_0 + y][L_\infty[y_0 + y] + k]}{i}(v + \ddot{y}_d) \tag{19}$$

con la siguiente realimentación de estados

$$v = -k_0 e_1 - k_1 e_2 - k_2 e_3 \tag{20}$$

donde $e_1 = y - y_d$, $e_2 = \dot{y} - \dot{y}_d$ y $e_3 = \left[-\frac{k}{2m}\frac{i^2}{[y_0+y]^2} + g - \ddot{y}_d\right]$. Nótese que en el caso de seguimiento, no se incluye ninguna acción integral.

3.2. Modos deslizantes [2,7,8]

Para el diseño del control por modos deslizantes, se parte de la transformación de coordenadas realizada en la sección de linealización exacta (13)-(15) y se asume que el sistema (4) tiene un grado relativo $r = n$. La estructura de control por modos deslizantes se obtiene como [2]:

$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}[k_0 e_1 + \ldots + k_{n-1} e_r + L_f^n h(x)] + v \tag{21}$$

El diseño de la acción de control puede ser tratado basandose en diferentes estrategias, siendo una forma directa definiendo una función de Lyapunov que haga de la superficie deslizante una región atractiva para las trayectorias del vector de estados [8], para este caso en particular se omite el análisis de estabilidad por cuestiones de espacio. Por la tanto la variedad deslizante se selecciona de tal manera que los errores del sistema convergan a cero en un tiempo finito y permanezcan dentro de la variedad para todo tiempo futuro y se define como como [2]:

$$s = k_0 e_0 + k_1 e_1 + \ldots + k_{n-1} e_{n-1} + e_n = 0 \tag{22}$$

El objetivo de control, para el caso de regulación, es diseñar una ley de control por realimentación de estados tal que la salida y siga asintóticamente una referencia constante y_d. La ley de control obtenida para el caso de regulación se expresa como

$$u = \frac{m}{k}\frac{[y_0 + y][L_\infty[y_0 + y] + k]}{i}[k_0 e_1 + k_1 e_2 + k_2 e_3 + L_f^3 h(x)] + v \tag{23}$$

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 317-326

con

$$v = -\beta(x)\text{sgn}(s) \tag{24}$$

donde sgn(·) es la función signo y $s = k_0e_0 + k_1e_1 + k_2e_2 + e_3$. Además, debe cumplirse la desigualdad

$$\beta(x) \geq \frac{\varrho(x)}{1-\kappa_0} + \beta_0 \tag{25}$$

donde $\beta_0 > 0$, y $\varrho(x)$ se acota de la siguiente manera

$$\left|\frac{\Delta(x,v,\omega,r)}{L_gL_f^2h(x)}\right| \leq \varrho(x) + \kappa_0|v|, \qquad 0 \leq \kappa_0 < 1. \tag{26}$$

De (26) se selecciona $\kappa_0 = 0$ y se observa que $\Delta(x,v,\omega,r) = 0$ debido a que en el sistema (4) no se incluyen incertidumbres paramétricas, por lo tanto $\varrho(x)$ es cualquier constante mayor que cero.

Para reducir las oscilaciones ( ) causadas por la función sgn(·), ésta puede ser aproximada por la función sat(·) (saturación), por lo tanto la ecuación (24) puede rescribirse como

$$v = -\beta(x)\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \tag{27}$$

donde ε es una constante positiva y la función saturación tiene la forma

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} -a & \frac{s}{\varepsilon} < a \\ \frac{s}{\varepsilon} & -a \leq \frac{s}{\varepsilon} \leq a \\ a & \frac{s}{\varepsilon} > a \end{cases} \tag{28}$$

El objetivo de control, para el caso de seguimiento, consiste en diseñar una ley de control por realimentación de estados tal que la salida y siga asintóticamente una referencia variante en el tiempo y_d. La ley de control por modos deslizantes, para el caso de seguimiento, se expresa como

$$u = -\frac{1}{LgL_f^{n-1}h(x)}[k_1e_2 + \ldots + k_{r-1}e_r + L_f^nh(x) - y_d^n] + v \tag{29}$$

Realizando las derivadas de Lie correspondientes, se tiene que

$$u = \frac{m}{k}\frac{[y_0+y][L_\infty[y_0+y]+k]}{i}[k_1e_2 + k_2e_3 + L_f^3h(x) - \dddot{y}_d] + v \tag{30}$$

Para el caso de seguimiento, tómese (27) con $s = k_1e_1 + k_2e_2 + e_3 = 0$ y además para ambos casos tómense los errores del controlador vía linealización exacta.

4. Descripción de la Plataforma

La plataforma experimental está compuesta de un sistema de levitación magnética MagLev (ver Figura 2), disponible por Quanser, y una computadora personal con la tarjeta de adquisición de datos MultiQ PCI, también de Quanser. La instrumentación de las leyes de control, en tiempo real, se lleva a cabo mediante el paquete simulink de Matlab.



Figura 2: Sistema de levitación magnética MagLev

Los valores numéricos de los parámetros de la plataforma experimental MagLev [10] son: $m = 0.068$ [kg], $g = 9.81$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$, $R = 11$ $[\Omega]$, $c = 0.014$ [m], $y_0 = 2 \times 10^{-3}$ [m], $L_\infty = 363$ [mH], $k = 6.5308 \times 10^{-5}$ $\left[\frac{\text{Nm}^2}{\text{A}^2}\right]$.

5. Resultados Experimentales

En esta sección se considera el problema de control para el caso de regulación y seguimiento. En la Figura 3 se presentan los resultados experimentales, para el caso de regulación, con los controladores desarrollados en la sección 3. En la Figura 4 se muestran los experimentos obtenidos para el caso de seguimiento. Al comparar los incisos (a) y (b) de la Figura 3, se puede observar que el controlador vía modos deslizantes presenta un mejor desempeño, debido a que su respuesta tiene un comportamiento dinámico más rápido, ante el cambio de la entrada escalón. Aún así la respuesta experimental del controlador vía linealización exacta es aceptable.

En los experimentos de seguimiento, para ambos controladores se observa que inician en una condición inicial de 0.0075 [m] y a partir de cierto instante de tiempo se inicia el seguimiento. Es importante mencionar que con el controlador por modos deslizantes se pudo levitar la esfera a 9 [mm] para el caso de

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 317-326

regulación, mientras que en seguimiento se levitó hasta 13 [mm], casi el rango máximo de operación del sistema MagLev. En lo que corresponde a linealización exacta, la esfera se levitó 6 [mm] en regulación y 10 [mm] en seguimiento.

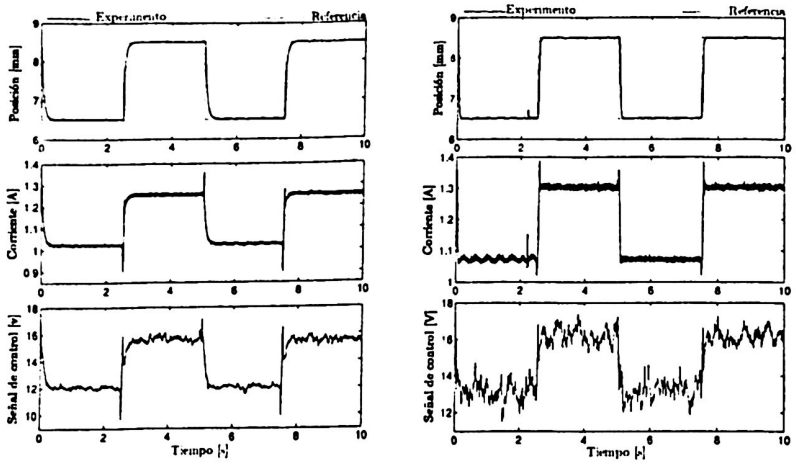


Figura 3: Respuesta experimental del sistema (regulación) (a) L. Exacta; (b) M. Deslizantes

Las ganancias que se utilizaron para la sintonización experimental de los controladores, para ambos casos, son las que se presentan en la Tabla 1

Tabla 1: Ganancias de los controladores

L. exacta	M. Deslizantes
$k_0 = 3000000$	$k_0 = 10$
$k_1 = 200000$	$k_1 = 9000$
$k_2 = 800$	$k_2 = 200$
$k_3 = 100$	$\beta_0 = 18$
	$\varrho = 1$
	$\varepsilon = 1$

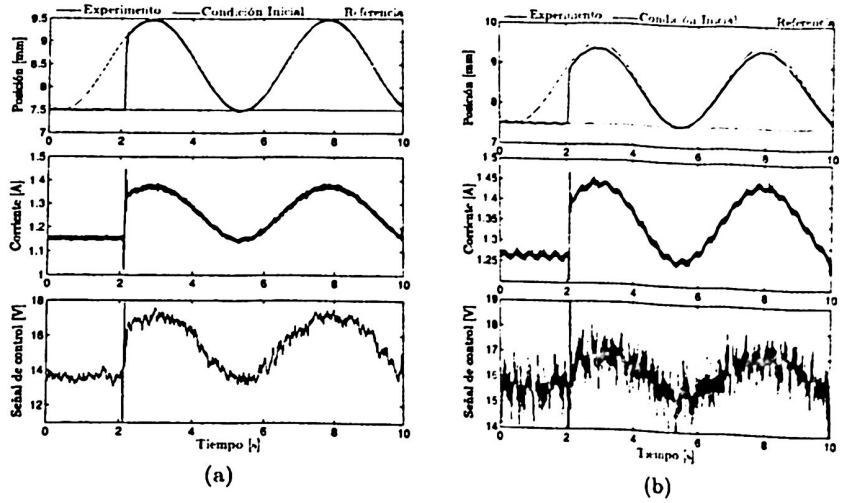


Figura 4: Respuesta experimental del sistema (seguimiento) (a) L. Exacta; (b) M. Deslizantes

6. CONCLUSIONES

En los recientes años el diseño de controladores vía modos deslizantes, ha tenido una considerable atención por parte de la comunidad de control automático. El diseño del control por modos deslizantes tiene caracteristicas que lo hacen una alternativa atractiva para resolver problemas de regulación y seguimiento en sistemas no lineales, la más importante es su robustez para modelar incertidumbres y dinámicas no modeladas. El control por modos deslizantes representa una alternativa para el control de sistemas electromecánicos. En este artículo se demostró, en pruebas experimentales, que el control por modos deslizantes tuvo un mejor desempeño que el controlador por linealización exacta (para el caso de regulación), debido a que la respuesta obtenida con este controlador fue más rápida ante el cambio de la entrada escalón. Aún así ambas respuestas son aceptables ya que se cumplió el objetivo de control. En la sección de modos deslizantes se sustituyó la función $\mathbf{sgn}(\cdot)$ por la función $\mathbf{sat}(\cdot)$ debido a que está última es más suave y no presenta tanto (pequeñas oscilaciones). Estas pequeñas oscilaciones podrían causar una baja exactitud en el control, altas pérdidas de calor en circuitos eléctricos de potencia y alto desgaste en las partes mecánicas.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 317-326

Referencias

1. A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, third Edition, 1995.
2. H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Second Edition, 1996.
3. R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland & B. máschke, "*Dissipative Systems Analysis and Control*", Springer - Verlag London, 2000.
4. A. El Hajjaji & M. Ouladsine, Modeling and Nonlinear Control of Magnetic Levitation Systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol 48, No. 4, pp. 831-838, August 2001.
5. W. Barie & J. Chiasson , Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation, *International Journal of Systems Science*, Vol. 27, No. 11, pp 1153-1163, 1996.
6. K. Fujimoto & T. Sugie, "Freedom in Coordinates Transformation for Exact Linearization and its Application to Transient Behavior Improvement", *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, December, Kobe, Japan, 1996.
7. D. Cho, Y. Kato & D. Spilman, Sliding mode and classical control for magnetic levitation systems, *IEEE Control System Magazine*, vol. 13, pp 42-48, 1993.
8. H. Gutierrez, & P. Ro, Sliding Mode Control of a Nonlinear-Input System: Application to a Magnetically Levitated Fast-Tool Servo, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, No. 6, December 1998.
9. Z. J. Yang & M. Minashima, Robust Nonlinear Control of a Feedback Linearizable Voltage-Controlled Magnetic Levitation System, *Transaction of IEE Japan*, Vol 121-C, No.7, 2001.
10. Quanser Consulting, "Magnetic Levitation Control Laboratory (MagLev)", Instructor Manual, 2003.

Estabilización de un péndulo invertido sobre base móvil mediante control híbrido.

R. Murueta Fortiz[1], W. F. Guerrero Sánchez[1], V. V. Alexandrov[1], J. F. Guerrero Castellanos[2]

[1] Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (BUAP), 72570 Puebla, Pue., México

[2] Ingeniería Mecatrónica de la Universidad Politécnica de Puebla (UPP), 72640 Juan C. Bonilla, Pue., México

Abstract. En este trabajo se hace el análisis del modélo matemático del sistema péndulo invertido sobre base móvil y la implementación de una ley de control sugerida por K. Aström y K. Furuta [1], para resolver el problema del swing-up. Con esta ley de control más una ley de control de estabilización se resuelven los dos subproblemas a los que este sistema da origen; llevar al péndulo a la cercanía del punto de equilibrio inestable y estabilizarlo en ese punto, estrategia conocida por algunos autores como control híbrido. La implementación de esta estrategia de control se realizó en el péndulo de la firma Feedback, prototipo que se encuentra en el Laboratorio de Sistemas Dinámicos Controlable de la FCFM-BUAP. Confirmando que de la teoría a la práctica existe un horizonte no despreciable.

1 Introduction

El control de un péndulo invertido constituye un problema clásico dentro del campo del control no lineal. Existen diferentes variantes del problema, entre las que destacan: péndulo de Furuta [1], péndulo sobre un vehículo de dos ruedas con motores independientes [2] y péndulo sobre una base (carro) móvil [3]; y otros casos derivados de estas como el péndulo con volante de inercia, el acrobot, el pendubot, el doble péndulo invertido, etc. A su vez, existe una amplia gama de controladores (lineales, no lineales, óptimos robustos, predictivos, etc.,) que han sido diseñados para estas aplicaciones en las últimas décadas.

En el problema del control del péndulo invertido se nos presenta un problema mucho más general y complejo que el del simple mantenimiento de la varilla del péndulo en la posición invertida (problema de estabilización): es el problema de llevar el péndulo desde la posición de equilibrio estable (posición colgante), a las cercanías de la posición invertida. Problema conocido como swing up [4].

El problema del swing up es de distinta naturaleza con respecto al de estabilización local puesto que se trata de un problema global y no lineal. Se trata, por tanto, de un ejemplo relativamente simple de problema no lineal donde el tratamiento lineal es insuficiente y que puede sirvir como banco de pruebas para las diversas teorías de control no lineal.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 317-326

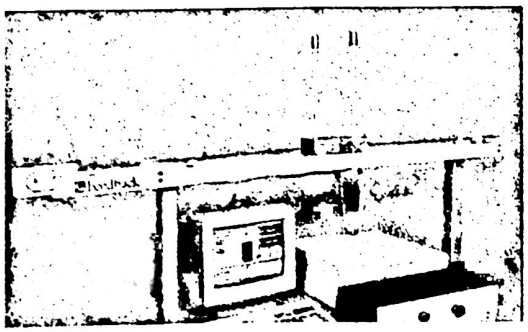


Fig. 1. Sistema del péndulo de Feedback.

En este trabajo básicamente se pretende resolver el problema de control para el péndulo de la firma Feedback, para esto, usamos resultados previos obtenidos para este dispositivo como el algoritmo de estabilización y técnicas de identificación trabajadas en [5]. Por lo que si se plantea el uso del enfoque híbrido [6] y usando los resultados previos antes mencionados, resta hallar un control para el problema del swing up. Sin embargo, existe en la literatura métodos de control basados en energía para resolver el problema de swing up, por lo que si optamos por elegir alguno de estos (especificamente el propuesto en [1]), resta la parte de implementación en el prototipo y la comprobación de su efectividad.

El trabajo esta organizado de la siguiente manera. En el segundo apartado se describe el prototipo que se desea controlar, enseguida se hace análisis del sistema, lo cual consiste en extraer un modelo matemático simplificado y finalmente se muestran los parámetros experimentales que aparecen en éste. En el apartado tercero se hace síntesis del sistema, es decir, se diseña un control para la estabilización y también un control para el balanceo según [1]. Como cuarto apartado se anotan algunas concluciones y posibles trabajos futuros.

2 Análisis del péndulo de Feedback.

Descripción del prototipo

El sistema a controlar es el péndulo de Feedback prototipo que aparece en la figura 1. Este consiste en dos varillas que giran libremente por uno de sus extremos mediante articulaciones situadas en una base (con forma de vehículo), la cuál se mueve sobre una guía rectilínea horizontal de magnitud constreñida bajo la acción de una fuerza u paralela a la guía, provocada por un motor de CD, esta fuerza es la acción de control con la que se pretende actuar sobre las posiciones de las varillas.

Modelación matemática del sistema

El sistema del péndulo de Feedback se puede reducir al estudio de un sistema de dos grados de libertad y un solo actuador, se trata pués, de un sistema subactuado con dos grados de libertad. Para efectos de la modelación matemática, consideramos que se trata de un solo péndulo de estructura rígida que rota en un plano vertical alrededor de un eje localizado en el centro de la base y perpendicular al plano vertical mencionado (izquierda de figura 2).

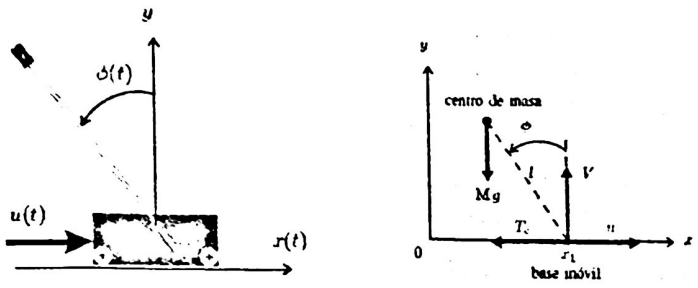


Fig. 2. Esquema simplificado del sistema (izquierda) y su diagrama de fuerzas (derecha).

Para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema, partimos por anotar las fuerzas que actúan en el sistema B-P (base-péndulo) a través del diagrama de fuerzas mostrado a la derecha de la figura 2, en el cual vemos que hay una fuerza de fricción T_c que se opone al movimiento de la base, la fuerza de reacción V del riel sobre el cual se mueve la base, el peso del sistema $(m_c+m_p)g$, y la fuerza de control u. Identificadas las fuerzas que actúan sobre el sistema B-P, se pueden encontrar las ecuaciones de movimiento que determinan el comportamiento dinámico del sistema B-P; para ello se usan las ecuaciones de Lagrange para el caso no conservativo (1) y las ecuaciones de rodadura que describen el factor no conservativo (2).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = (Q_\mu)_{nc} + (Q_\mu)_{const} \tag{1}$$

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0 \tag{2}$$

donde L es lagrangiano del sistema, q_μ son las coordenadas generalizadas y $(Q_{q_\mu})_{nc}$ y $(Q_{q_\mu})_{const}$ representan las fuerzas generalizadas relativas a fuerzas conservativas y no conservativas, respectivamente.

El modelo matemático encontrado esta dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales

$$(J+Ml^2\sin^2 x_2)\frac{d^2x_2}{dt^2} + Ml^2\sin x_2(\cos x_2)\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - Mgl\sin x_2 + D_P = (u-T_c)l\cos x_2 \tag{3}$$

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} - Ml(\cos x_2)\frac{d^2x_2}{dt^2} + Ml(\sin x_2)(\frac{dx_2}{dt})^2 = u - T_c \tag{4}$$

Estas dos ecuaciones se pueden escribir como

$$M'(x_2)\ddot{X} + C(x_2,\dot{x}_2)\dot{X} + G(x_2) = \tau(x_2,\dot{x}_2) \tag{5}$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mgl\sin x_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}_2 Ml\sin x_2 \\ 0 & \dot{x}_2 Ml^2 \sin x_2 \cos x_2 \end{pmatrix},$$

$$M' = \begin{pmatrix} M - Ml\cos x_2 \\ 0J + Ml^2\sin^2 x_2 \end{pmatrix} y\ \tau = \begin{pmatrix} u - T_c \\ (u - T_c)l\cos x_2 - D_p \end{pmatrix}$$

$M'(x_2)$ en la ec. (5) es una matriz que contiene los parámetros de inercia y es llamada la matriz de momentos de inercia o simplemente matriz de inercia; $C(x_2,\dot{x}_2)$ produce términos de fuerzas de Coriolis de la forma $\dot{x}_i\dot{x}_j$ y centrífugas de la forma $\dot{x}_2^2$; $G(x_2)$ contiene el términos asociado al peso de la varilla que genera momentos de fuerza en la articulación por la acción de la gravedad y τ contiene las fuerzas producidas por el actuador sobre el sistema.

Auxiliandonos de la ec. (5) y el cambio de variable $\dot{x}_1 = x_3$ y $\dot{x}_2 = x_4$ donde x_3 corresponde a la velocidad del carrito y x_4 a la velocidad angular, podemos expresar el modelo anterior en la forma de Cauchy, de lo cual resulta:

$\dot{x}_1 = x_3,\ \ x_1(t_0) = a'$

$\dot{x}_2 = x_4,\ \ x_2(t_0) = b$

$$\dot{x}_3 = \Delta(a(u - T_c - \mu x_4^2\sin x_2) + l\cos x_2(\mu\sin x_2 - x_4 f_p)),$$

$x_3(t_0) = c$

$$\dot{x}_4 = (l\cos x_2(u - T_c - \mu x_4^2\sin x_2) + \mu g\sin x_2 - x_4 f_p),$$

$x_4(t_0) = d$

donde $a = l^2 + \frac{J}{m_c+m_p}$, $\Delta = \frac{1}{J+Ml^2\sin^2 x_2}$ y $\mu = (m_c + m_p)l$.

De estas ecuaciones en forma de Cauchy se obtienen los puntos de equilibrio, encontrando que hay uno inestable en la posición invertida y multiples estables en la posición colgante. Y una estrategia que se usa para estimar una ley de control que estabiliza al péndulo en la posición deseada consiste en linealizar al sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio deseado, este control estabilizará al sistema no lineal alrededor del punto de equilibrio inestable. El modelo linealizado tiene la forma forma $\dot{y} = Ay + Bu$, esto es;

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\mu lg}{J} & 0 & -\frac{lf_p}{J} \\ 0 & \frac{\mu g}{J} & 0 & -\frac{f_p}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{J} \\ \frac{l}{J} \end{pmatrix} u \tag{6}$$

Parámetros del sistema

Los parámetros principales que son los que aparecen en (6) se hallaron de manera experimental, para esto, se usaron tanto técnicas de identificación en línea como fuera de línea así como algunos experimentos adicionales [5], tales parámetros se encuentran resumidos en la tabla 1.

Parámetro	Unidades	Valor
Parámetro μ	$Kg*m$	0.023392
Constante de gravedad g	$\frac{m}{s^2}$	9.8
Momento de inercia J	$Kg*m^2$	0.0246
Fricción del péndulo f_p	$Kg*\frac{m^2}{s}$	0.000107443
Parámetro a	m^2	0.01026
Par'ametro l	m	0.0167903

Tabla 1. Parámetros experimentales del sistema.

3 Síntesis del sistema.

Análisis de estabilidad

Para analizar la estabilidad alrededor del punto de equilibrio inestable, calculamos los eigenvalores de la matriz A de la ecuación (6) que resulta de la linealización, estos deberán poseer parte real negativa para que el sistema sea asintóticamente estable en la vecindad de tal punto de equilibrio. La matriz no es Hurwitz por lo que el sistema es inestable en ese punto [7].

Análisis de controlabilidad

Ahora debemos de verificar que el sistema sea completamente controlable. La matriz de controlabilidad $M = [B\ AB\ A^2B\ A^3B]$ es de rango 4, por lo que el sistema linealizado es de estados completamente controlables y en consecuencia el sistema no-lineal es también controlable en una vecindad del punto de equilibrio.

Diseño del control lineal optimal

La ley de control que se propone, tiene la forma,

$$u = -Ky(t) \tag{7}$$

La matriz de ganancias K la podemos construir usando la herramienta de Matlab $K = lqr(A,B,Q,R)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1491 & 0 & -6.9\times10^{-5} \\ 0 & 9.3187 & 0 & -0.0043 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6944 \\ 0.6504 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{pmatrix} y\ R = [1]$$

Y escencialmente se resuelve la ecuación matricial de Ricatti en horizonte infinito. Las matrices Q y R que penalizan respectivamente el error del estado y el esfuerzo de control en principio son arbitrarias, la unica condición que se les pide es que sean simétricas y definida positivas, esto para garantizar que el sistema tendrá comportamiento asintóticamente estable, pues el sistema es tanto controlable como observable. Esto asienta las condiciones suficientes para la solución de la ecuación de Ricatti y ahora si tiene sentido hablar de que existe una matriz de ganancias K que minimiza el funcional de costo.

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Prosiguiendo con nuestro cálculo con matlab, tenemos que,

$$K = (-0.1000 \;\; 43.5990 \;\; -2.6407 \;\; 14.3403)$$

Por lo tanto la ley de control buscada según la ec. (7) es

$$u = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + k_4 y_4 \tag{8}$$

si sustituimos la ecuación (8) en la ecuación (6) vemos que con este control la matriz del sistema modificado $\dot{y} = (A - BK)y = Gy$ es Hurwitz, de modo que el sistema en una vecindad del punto de equilibrio inestable tiene ahora comportamiento asintóticamente estable. Si graficamos tomando condiciones iniciales en una vecindad del punto de equilibrio, podremos ver el comportamiento del sistema en una región de estabilidadad. En la figura 3 se puede ver una gráfica que muestra el comportamiento del sistema alrededor del punto de equilibrio para la condición inicial $y_0 = [0.1 \; 0.1 \; 0.1 \; 0.1]$.

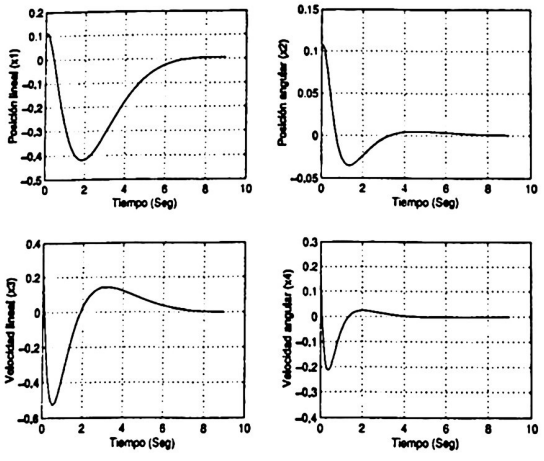


Fig. 3. Comportamiento del sistema base péndulo con el control.

Al implementar las ganancias obtenemos la respuesta en tiempo real con retardo de $10ms$ mostrada en la figura 4.

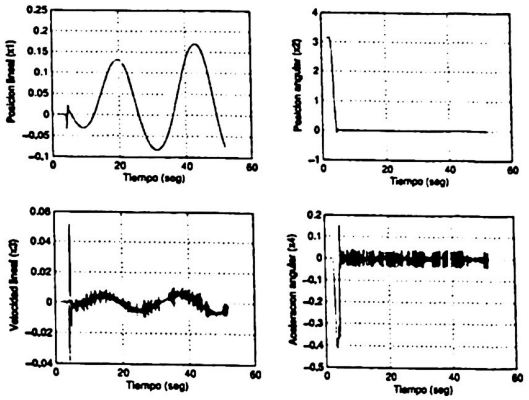


Fig. 4. Evolución de las variables de estado con las ganancias encontradas

Para resolver el problema de las oscilaciones en la posición se uso la siguiente función de control de saturación;

$$f(u) = 1.6tanh(u[1]) \tag{9}$$

Si implementamos esta función de control de saturación la respuesta en tiempo real con este control se muestra en la figura 5.

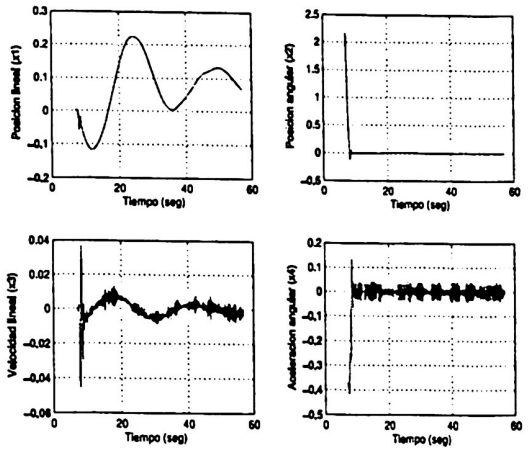


Fig. 5. Evolución de las variables de estado con las ganancias y función de control implementadas

Control para el balanceo.

El control para el balanceo que usamos es un control por energía basado en [1]. Así, para el péndulo simple mostrado a la izquierda de la figura 6, la ecuación de movimiento esta dada por (10) considerando el pivote con velocidad sin límites.

$$J\ddot{\theta} - mgl\sin\theta + mvl\cos\theta = 0 \tag{10}$$

Las variables de estado son ahora θ y $\dot{\theta}$. La energía del péndulo sin control (v=0) esta dada por (11)

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgl(\cos\theta - 1) \tag{11}$$

La máxima aceleración del pivote es $v_{max} = max|v| = ng$. Si introducimos las variables normalizadas $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$, $\tau = \omega_0 t$ y $\omega = \frac{v}{g}$. La ecuación de movimiento normalizada es entonces

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \sin\theta + \omega\cos\theta = 0 \tag{12}$$

donde $|\omega| \leq n$. La energía total normalizada del sistema no controlado ($\omega = 0$) esta dada por la ecuación (13)

$$E_n = \frac{E}{mgl} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \cos\theta - 1 \tag{13}$$

El sistema es así caracterizado por dos parámetros solamente, la frecuencia natural de las pequeñas oscilaciones ω_0 y la aceleración máxima normalizada del péndulo $n = \frac{u_{max}}{g}$. El modelo dado por (10) es localmente controlable cuando $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

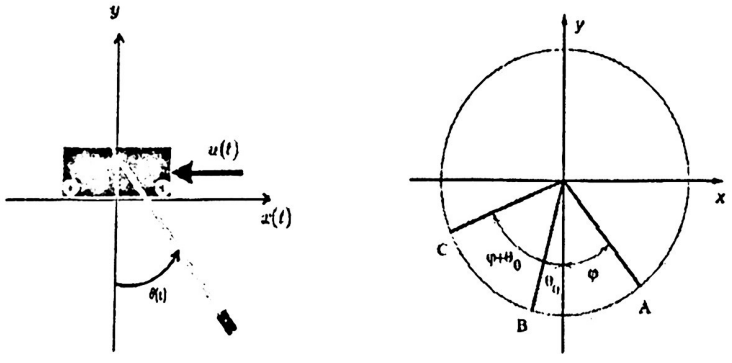


Fig. 6. Péndulo simple con aceleración del pivote (izquierda) y su ilustración geométrica (derecha).

Para balacear el péndulo a la posición vertical hay que dar a este una energía correspondiente a la posición vertical (derecha de la figura 6). Esta corresponde a la trayectoria:

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgl(\cos\theta - 1) \tag{14}$$

la cual pasa a través del punto de equilirio inestable. Una estrategia diferente es capturar al péndulo cuando este pasa por el punto de equilibrio inestable. Tal estrategia también puede capturar el péndulo incluso si hay un error en el control de energía y no pasa por el equilibrio deseado. La energía E de el péndulo no controlado es dado por la ecuación (11). Para realizar un control por energía es necesario comprender como la energía es influenciada por la aceleración del pivote, para ello calculamos:

$$\frac{dE}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta}\sin\theta = -mul\dot{\theta}\cos\theta \tag{15}$$

Para incrementar la energía la aceleración del pivote u debe de ser positiva cuando la catidad $\dot{\theta}\cos\theta$ es negativa. Una estrategia de control es fácilmente obtenida por el método de Liapuov, si ecogemos $V = \frac{(E-E_0)^2}{2}$

$$\frac{dV}{dt} = -mlk((E - E_0)\dot{\theta}\cos\theta)^2 \tag{16}$$

y podemos usar la la ley de control

$$u = k(E - E_0)\dot{\theta}\cos\theta \tag{17}$$

Vemos que la derivada de la función de Liapunov disminuye mientras $\dot{\theta} \neq 0$ y $\cos\theta \neq 0$. Esta estrategia conduce la energía hacia su valor deseado E_0. Para cambiar la energía tan rápido como sea posible la magnitud de la señal de control deberá ser tan grande como sea posible. Esto es logrado con la ley de control (18).

$$u = ngsign((E - E_0)\dot{\theta}\cos\theta) \tag{18}$$

la cual conduce a la función $V = |E - E_0|$ a cero y E hacia E_0. La ley de control puede resultar inadecuada. Esto puede ser evitado con la ley de control (19).

$$u = sat_{ng}(k(E - E_0)sign(\dot{\theta}\cos\theta)) \tag{19}$$

donde sat_{ng} denota una función lineal la cual se satura en ng. La estrategia (19) se comporta como el controlador lineal (17) para pequeños errores y como la estrategia (18) para grandes errores. En la figura 7 se muestra la respuesta en tiempo real con los dos controles implementados.

4 Conclusiones.

En este trabajo se retomo la idea de usar un control lineal optimal proporcional al vector de estado junto con un control saturado, para resolver el problema de estabilización del péndulo invertido del prototipo de Feedback.

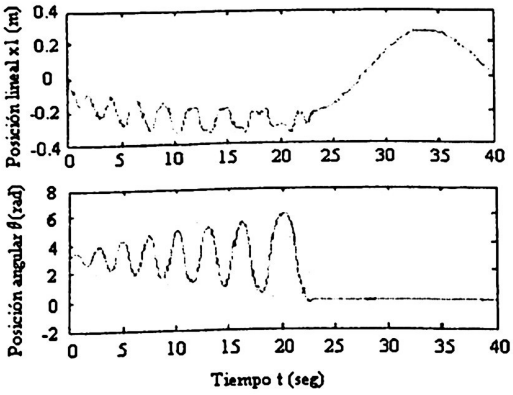


Fig. 7. Evolución de la posición angular y posición lineal con los controles implementados.

Por otra parte se implemento el control no lineal basado en energía propuesto por [1] para resolver el problema del swing up.

Finalmente, se implementaron los dos controles siguiendo la idea del control híbrido a fin de llevar el péndulo de la posición colgante inicial a la posición invertida final.

A futuro se puede encontrar un control cuya respuesta en tiempo real muestre características de desempeño más dinámicas en relación a las encontradas hasta ahora.

References

1. Aström, K. J. and K. Furuta, *Swinging -up a pendulum by energy control*, IFAC congress, pp. 37-95, 1996.
2. K. Furuta, *Control of pendulum: From super mechano-system to human adaptive mechatronics*, 42nd, IEEE. CDC, 2003.
3. Gordillo, F., F. Salas and J. Aracil, *A forwarding controller for the pendulum on a cart*, Procedings of Control, Vol. 6. Portugal, 2004.
4. J. A. Acosta, F. Gordillo, J. Aracil, *A new sg law for swinging the furuta up pendulum*, Dept. de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, España.
5. R. Murueta Fortiz, *Algoritmo de estabilización de un péndulo invertido sobre base móvil.*, Tesis de Licenciatura, FCFM, BUAP, Febrero 2008.
6. M. Egerstedt, X. Hu and A. Stotsky *A Hibrid Control Approach to Action Coordination for Mobile Robots*, Div. of Optimization and Systems Theory, Royal Institute of Technology, SE-100 44, Stockholm, Sweden.
7. V. V. Alexandrov, S. I. Zlochevskii, R. Reyes Sánchez, H. Salazar Ibargüen, *Introducción a la Modelación Matemática de los Sistemas Controlables.*, Cap. 2, Pag. 47, BUAP, Puebla, 2000.

Sincronización y Caos

Synchronization in Nonlinear Systems Under Multiplicative Perturbations Over its Linear Parts

D. Becker-Bessudo, G. Fernández-Anaya, and J.J. Flores-Godoy

Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Iberoamericana, Prol. Paseo de la Reforma 880, México, D. F. 01219, MÉXICO

Abstract. The objective of this paper is to show that under a defined multiplicative group, hyperbolic equilibrium points of a dynamical system are preserved along the stable and unstable manifolds. As a consequence, synchronization is also preserved for a master/slave system configuration. The properties of this multiplicative group are determined through the use of simultaneous Schur decomposition.

Key words: Control, Preservation of Synchronization, Chaotic systems, Nonlinear systems, Output feedback and Observers

1 Introduction

The study of synchronization preservation is relevant when it comes to chaos control problems. As a matter of fact, the generalized synchronization can even be derived for different systems by finding a diffeomorphic transformation such that the states of the slave system can be written as a function of the states of the master dynamics (see [1] and references therein). This result can be seen as a timely contribution; however, in accordance to the goal of keeping intact the stability under the transformation, a new question arises: how can stability be preserved under transformations suffered by a dynamical system? An answer to this question might allow us to ensure synchronization in strictly different systems, in the sense that stability of the error dynamics is preserved under the transformation. Preservation of stability for a class of nonlinear autonomous dynamical systems has been reported in the last decades [2]. The underlying idea is to preserve the stability properties under transformation of finite-dimensional dynamical systems. In the case of linear dynamical systems there exist several results of stability preservation, for instance in [3–5], stability is asymptotically preserved using transformations on rational functions in the frequency domain. We present a simple extension of the Stable-Unstable Manifold Theorem, based on the preservation of the signature of the real parts of the eigenvalues of an underlying Jacobian matrix. The developed methodology is based on the use of matrix theory tools, specifically, simultaneous Schur decomposition, the multiplicative group structure for triangular and diagonal matrices, the closure under product of positive definite matrices and the eigenvalue sign-preservation for

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 329-338

both real and complex matrices under matrix multiplication. The results on preservation of structure, stability and synchronization based on the extension of the stable-unstable manifold theorem show that stability and synchronization can be preserved by transforming the linear part of the synchronization system.

2 Structure Preservation

In this section we present the necessary definitions and results that will allow us to prove the main propositions of this paper. The results will be used in section 4 where we will present some examples on preservation of synchronization in dynamical systems.

Simultaneous Schur decompositions are defined as follows

Definition 1. *The group of matrices A_1, A_2, ..., A_n is said to be Schur simultaneously decomposable if there exists a unitary matrix U, where $UU^\top = U^\top U = I$, such that*

$$A_1 = UT_1U^\top,\ A_2 = UT_2U^\top,\ \ldots,\ A_n = UT_nU^\top$$

where T_i is an upper triangular matrix.

For the following discussion consider the dynamical system described by

$$\dot{x} = f(x)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ and $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a continuous differentiable function of its argument. Let $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0}$ be the Jacobian matrix associated with f evaluated at an equilibrium point x_0.

We introduce the following lemma in order to establish structure preservation under matrix multiplication of simultaneous Schur decomposable matrices.

Lemma 1. *The modifying matrix M, which is a simultaneous block diagonal Schur decomposition of our dynamical system's associated Jacobian matrix A, will maintain the system's structure.*

Proof. We propose a matrix M that is a block diagonal simultaneous Schur decomposition to our matrix A

$$A = UT_AU^\top$$
$$M = UD_MU^\top$$

then our modified system will now become

$$MA = UD_MU^\top UT_AU^\top = UD_MT_AU^\top = U\hat{T}_AU^\top$$

Thus preserving the system's structure.

This small proof enables us to pursue the definition of a multiplicative group under the product of simultaneous Schur decomposable matrices. What follows now is the explicit definition of the multiplicative group and its properties which allow for preservation of stability. Using this group we present an extension of the Stable-Unstable Manifold theorem (Proposition 1).

3 Local Stable-Unstable Theorem Extension

The following proposition is a simple extension of the Local Stable-Unstable Manifold Theorem for the action of group Γ_U on the matrix A and the vector field $f(x)$ where A, the system's linear coefficients matrix, may be decomposed as $A = UT_AU^\top$, with T_A an upper triangular matrix and $UU^\top = U^\top U = I$. We define Δ_{pd} as the set of block diagonal matrices whose real coefficients are all positive and the group Γ_U as

$$\Gamma_U = \left\{ M \in \mathbb{R}^{n\times n} \middle| \begin{array}{l} M = UD_MU^\top \\ \text{with } D_M \text{ a block diagonal matrix} \\ \text{and } D_M \in \Delta_{pd} \end{array} \right\}$$

This proposition is an alternative result to proposition 4.2 presented in [6] using simultaneous Schur decomposition and standard matrix product.

Proposition 1. *Let E be an open subset of $\mathbb{R}^n$ containing the origin, let $f \in C^1(E)$, and let ϕ_t be the flow of the nonlinear system $\dot{x} = f(x) = Ax + g(x)$. Suppose that $f(0) = 0$ and that $A = Df(0)$ has k eigenvalues with negative real part and $n-k$ eigenvalues with positive real part, i.e., the origin is an hyperbolic fixed point. Then for each matrix $M \in \Gamma_U$, as previously defined, there exists a k-dimensional differentiable manifold S_M tangent to the stable subspace E^S_M of the linear system $\dot{x} = MAx$ at 0 such that for all $t \geq 0$, $\phi_{M,t}(S_M) \subset S_M$ and for all $x_0 \in S_M$,*

$$\lim_{t\to\infty} \phi_{M,t}(x_0) = 0,$$

where $\phi_{M,t}$ be the flow of the nonlinear system $\dot{x} = MAx + g(x)$; and there exists an $n-k$ dimensional differentiable manifold W_M tangent to the unstable subspace E^W_M of $\dot{x} = MAx$ at 0 such that for all $t \leq 0$, $\phi_{M,t}(W_M) \subset W_M$ and for all $x_0 \in W_M$,

$$\lim_{t\to-\infty} \phi_{M,t}(x_0) = 0.$$

An interesting property is that Proposition 1 is valid for each $\overline{g} \in C^1(E)$ such that $\dot{x} = \overline{f}(x) = Ax + \overline{g}(x)$ and

$$\frac{\|\overline{g}(x)\|_2}{\|x\|_2} \to 0 \text{ as } \|x\|_2 \to 0.$$

In consequence, the set of matrices Γ_U generate the action of the group Γ_U on the set of hyperbolic nonlinear systems (formally on the set of hyperbolic vector fields $f \in C^1(E)$) $\dot{x} = \overline{f}(x) = Ax + \overline{g}(x)$ with $\overline{g} \in C^1(E)$ and

$$\Lambda \equiv \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \middle| \begin{array}{l} A = UT_AU^\top \text{ with } T_A \\ \text{the Schur decomposition of } A \end{array} \right\}$$

satisfying the last condition, where U is a unitary matrix, this action is faithful and free. The former action is generated by the action of the group Γ_U on the set

A. The action preserves hyperbolic points in nonlinear systems and dimension of the stable and unstable manifolds, i.e, an hyperbolic nonlinear system ($\dot{x} = Ax + \overline{g}(x)$) is mapped in an hyperbolic nonlinear system ($\dot{x} = MAx + \overline{g}(x)$), and $\dim S = \dim S_M$ *and* $\dim W = \dim W_M$.

The following remarks are necessary for our proof

Remark 1. For a complex eigenvalue $a_k + ib_k$, belonging to A where $a_k < 0$; it is required that the eigenvalues of our complex modifying matrix M, $\bar{a}_k + i\bar{b}_k$, fulfill $\bar{a}_k > 0$ and $\pm b_k \Rightarrow \pm\bar{b}_k$.

Remark 2. For a complex eigenvalue $a_k + ib_k$, belonging to A where $a_k > 0$; it is required that the eigenvalues of our complex modifying matrix M, $\bar{a}_k + i\bar{b}_k$, fulfill $\bar{a}_k > 0$ and $\pm b_k \Rightarrow \mp\bar{b}_k$.

Sketch of Proof:

1. Real Coefficients
   Consider a matrix A of order $n \times n$ with decomposition $A = UT_AU^\top$, where T_A is an upper triangular matrix with k negative real eigenvalues and $n-k$ positive real eigenvalues and U is a unitary $n \times n$ matrix, and the decomposition $M = UD_MU^\top$, $M \in \Gamma_U$. By our proposition we carry out the matrix product $MA = UD_MU^\top UT_AU^\top = UD_MT_AU^\top$. Looking at the product of triangular and diagonal matrices D_M and T_A whose eigenvalues are $\sigma_M = \{\lambda_i\}$ and $\sigma_A = \{\mu_i\}$, respectively. It is simple to observe that the resulting matrix's eigenvalues are precisely the individual products of the original matrices' eigenvalues; $\sigma_{MA} = \{\lambda_i\mu_i\}$. Since $M \in \Gamma_U$ is strictly positive, then the matrix MA has k eigenvalues with negative real part and $n-k$ eigenvalues with positive real part. Since the dimensions of each manifold have not changed, the result is a consequence of the Stable-Unstable Manifold Theorem and Lemma 1.
2. Complex Coefficients
   Consider the same conditions established in the previous point except that the Jacobian and modifying matrices now have complex eigenvalues. Seeing that the product of matrices D_M and T_A results in a block matrix of complex eigenvalues we must adhere to what was previously established in remarks 1 and 2. For the case of the eigenvalues related to matrix A with negative real part $a_k < 0$ (remark 1) we have the following product of eigenvalues $(a_k \pm ib_k)(\bar{a}_k \pm i\bar{b}_k) = a_k\bar{a}_k - \bar{b}_kb_k \pm i(a_k\bar{b}_k + \bar{a}_kb_k)$, since $\bar{a}_k > 0$ it follows that $a_k\bar{a}_k < 0$ and subtracting $\bar{b}_kb_k$ will keep the real part of the new eigenvalue negative. Similarly in the case that $a_k > 0$ (remark 2) we have $(a_k \pm ib_k)(\bar{a}_k \mp i\bar{b}_k) = a_k\bar{a}_k + \bar{b}_kb_k \pm i(a_k\bar{b}_k \mp \bar{a}_kb_k)$, since $\bar{a}_k > 0$ it follows that $a_k\bar{a}_k > 0$ and adding $\bar{b}_kb_k$ will keep the real part of the new eigenvalue positive. Then the matrix MA has k eigenvalues with negative real part and $n-k$ eigenvalues with positive real part. Again the dimension of each manifold is the same as the original system's, therefore the result is again a consequence of the Stable-Unstable Manifold Theorem and Lemma 1.

The relevance of this proposition, which differs from that which appears in [6], resides on the fact that critical hyperbolic equilibrium points are preserved. As a consequence of this we established properties which allow us to preserve the signature of the associated Jacobian matrix.

In sections 4 and 5 it will be shown, through example, that stability and synchronization are preserved under modifications performed on dynamical systems following the methodology of Proposition 1. This proposition on the extension of the Stable-Unstable Manifold Theorem is different to other approaches for stability and synchronization preservation such as [7] where Lyapunov's indirect method was employed.

Notice that given a particular nonlinear system, the stable and unstable manifolds S and W are unique.

4 Preservation of Synchronization in Modified Systems

In this section we show how it is possible to preserve synchronization after a system's eigenvalues have been modified under the action of a class of transformation on the linear part of the nonlinear system.

Consider following n-dimensional systems in a master-slave configuration, where the master system is given by

$$\dot{x} = Ax + g(x)$$

and the slave system is

$$\dot{y} = Ay + f(y) + u(t)$$

where $A \in R^{n\times n}$ is a constant matrix, $f, g : R^n \to R^n$ are continuous nonlinear functions and $u \in R^n$ is the control input. The problem of synchronization considered in this section is the complete-state exact synchronization. That is, the master system and the slave system are synchronized by designing an appropriate nonlinear state feedback control $u(t)$ which is attached to the slave system such that

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t) - x(t)\| \to 0$$

where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm of a vector.

Considering the error state vector $e = y - x \in R^n$, $f(y) - g(x) = L(x, y)$ and an error dynamics equation

$$\dot{e} = Ae + L(x, y) + u(t).$$

Based in the active control approach [8], to eliminate the nonlinear part of the error dynamics, and choosing $u(t) = Bv(t) - L(x, y)$, where B is a constant gain matrix which is selected such that (A, B) be controllable, we obtain

$$\dot{e} = Ae + Bv(t).$$

Notice that the original synchronization problem is equivalent to the problem of stabilizing the zero-input solution of the last system by a suitable choice of the state feedback control.

Since the pair (A, B) is controllable one such suitable choice for state feedback is a linear-quadratic state-feedback regulator [9], which minimizes the quadratic cost function

$$J(u(t)) = \int_0^\infty \left(e(t)^\top Q e(t) + v(t)^\top R v(t)\right) dt$$

where Q and R are positive semi-definite and a positive definite weighting matrices, respectively. The state-feedback law is given by $v = -Ke$ with $K = R^{-1}B^\top S$ and S the solution to the Riccati equation

$$A^\top S + SA - SBR^{-1}B^\top + Q = 0.$$

This state-feedback law renders the error equation to $\dot{e} = (A - BK)e$, with $(A - BK)$ a Hurwitz matrix[1]. The linear quadratic regulator (LQR) is a well-known design technique that provides practical feedback gains [9]. An interesting property of (LQR) is robustness.

Now consider $M \in \Gamma_U$, and suppose that the following two n-dimensional systems are chaotic

$$\dot{x} = (MA)\, x + g(x)$$
$$\dot{y} = (MA)\, y + f(y) + \widehat{u}(t)$$

for some $f, g : R^n \to R^n$ continuous nonlinear functions and $\widehat{u} \in R^n$ is the control input. We have that $\widehat{u}(t) = -(MBK)\, e - L(x, y)$ stabilizes the zero solution of the error dynamics system, the resultant system

$$\dot{e} = (M\,(A - BK))\, e$$

is asymptotically stable. Notice that using $K = R^{-1}B^\top S$, we obtain

$$\dot{e} = \left(M\left(A - BR^{-1}B^\top S\right)\right) e$$

The original control $u(t) = -BKe - L(x, y)$ is preserved in its linear part by the matrix product $M(\cdot)$ and the new control is given by $\widehat{u}(t) = -(MBK)\, e - L(x, y)$. Therefore, we can interpret the last procedure as one in which the controller $u(t)$ which achieves the synchronization in the two original systems is preserved under the transformation $M(\cdot)$ so that $\widehat{u}(t)$ achieves the synchronization in the two resultant systems after the transformation. A similar procedure is possible if we consider the transformation $(\cdot)\, M$.

In general, under the transformations $(A, g) \to (MA, \overline{g})$, and under the hypothesis of the existence of a constant state feedback $\mathbf{U} = -Kx$ which achieves synchronization of the original chaotic systems, and also that the transformed systems are chaotic, synchronization can be preserved.

The main contribution in this section does not deal with a better synchronization methodology, rather it deals with the fact that synchronization is preserved when the underlying nonlinear chaotic dynamical system is altered in such a way as to change its dynamical behavior yet preserving the topological structure near the origin.

[1] A Hurwitz matrix is a matrix for which all its eigenvalues are such that their real part is strictly less than zero

5 Synchronization of a Chaotic Attractor

5.1 The Sprott O Attractor

The dynamical system of what is know as the Sprott O attractor, which has chaotic behavior, is defined by

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_3\\ \dot{x}_3 &= x_1 + 2.7x_2 + x_1x_3\end{aligned}$$

In order to observe synchronization behavior we present two Sprott O attractors arranged as a master/slave configuration. The master and the slave systems are almost identical, the only difference being that the slave system includes an extra term (the control) which is used for the purpose of synchronization with the master system. The initial conditions for the two systems are different.

Considering the errors $e_1 = y_1 - x_1$, $e_2 = y_2 - x_2$, $e_3 = y_3 - x_3$, then the error dynamics equations may be written as

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 + u_1(t)\\ \dot{e}_2 &= e_1 - e_3 + u_2(t)\\ \dot{e}_3 &= e_1 + 2.7e_2 + y_1y_3 - x_1x_3 + u_3(t)\end{aligned}$$

Introducing the Jacobian (A) and non-linear terms (L) matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 2.7 & 0\end{pmatrix},\ L(x,y) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ y_1y_3 - x_1x_3\end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\end{pmatrix}$$

and selecting the matrix B such that (A, B) is controllable: $B = I$. Now the LQR controller is obtained by using weighting matrices $Q = I$ and $R = B^{\top}B = I$. The state feedback matrix is given by

$$K = \begin{pmatrix} 1.3465 & 0.9819 & -0.0894\\ 0.9819 & 1.7009 & 0.1709\\ -0.0894 & 0.1709 & 0.7881\end{pmatrix}$$

In Fig. 1 the trajectories for the solution of the master system and slave system are shown. In Fig. 2 the absolute value for the errors between the master and slave systems are shown in a semi-logarithmic plot to emphasize the fact that the error converges to zero and therefore the synchronization between the master and slave systems is successfully achieved.

5.2 The Modified Sprott O Attractor

The following example shows the modifications performed on the Sprott O attractor with a complex eigenvalue block diagonal matrix. The general equation

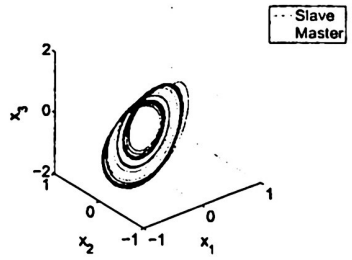


Fig. 1. Original Sprott O attractor showing synchronization between master and slave systems (initial conditions $x_1 = 0.1, x_2 = 0.3, x_3 = 0.2$ and $y_1 = 0.4, y_2 = 0.2, y_3 = 0.1$ respectively).

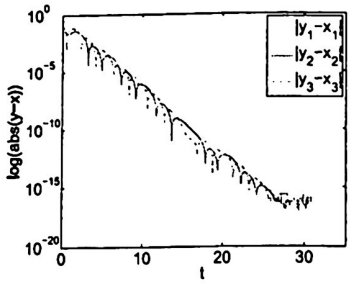


Fig. 2. Magnitude of error $|e| = |y - x|$ between master and slave systems.

for the modified Sprott master and slave systems' linear and non-linear parts may be defined as follows

$$\dot{x} = (MA)x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_1 x_3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},$$
$$\dot{y} = (MA)y + \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_1 y_3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} + u(t)$$

Considering the error vector $e = y - x$, then the error dynamics may be written as

$$\dot{e} = (MA)e + L(x, y) + u(t)$$

with $u = -L(x, y) + v$ and $v = -(MBK)e$

Defining the modifying matrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0.9777 & -0.0114 & 0.0224 \\ -0.0169 & 0.9572 & -0.0067 \\ 0.0186 & -0.0142 & 0.9651 \end{pmatrix}$$

which was constructed using simultaneous Schur decomposition and following the sign relationships established in Remark 2 (Since the real coefficients of the

complex eigenvalues of A are positive). Once again we use K as in section 5.1 and $u = -(M_1BK)e - L(x, y)$.

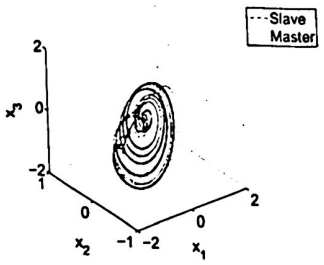


Fig. 3. Master and slave system (initial conditions $x_1 = 0.5, x_2 = 0.03, x_3 = 0.5$ and $y_1 = 0.05, y_2 = 0.03, y_3 = 0.02$ respectively) synchronization of modified Sprott O attractor (with $M_1 \in \Omega_P$ having both real and complex eigenvalues).

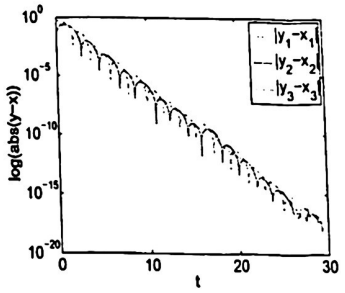


Fig. 4. Magnitude of error $|e| = |y - x|$ between master and slave systems (real and complex eigenvalue modifications).

In Fig. 4 we have the absolute error of the master/slave system configuration, with complex matrix perturbation, and again we see that there is an effective convergence to zero.

Looking at the modified attractor in Fig. 3, as far as we can see, the chaotic dynamics are preserved.

Taking into account that the control input that was applied to achieve synchronization in the presented example was generated through the same methodology used to modify the linear part of the system and that synchronization was achieved, we may infer robustness under multiplicative perturbations over the linear part of nonlinear systems.

6 Conclusions

The preservation of hyperbolic behavior in chaotic synchronization is studied from an extension of the local stable-unstable manifold theorem based in the preservation of the signature of the linear part of the vector fields in nonlinear dynamical systems. It has been shown that a master/slave pair for which synchronization is achieved via the use of a state feedback obtained using a linear-quadratic regulator, synchronization may be preserved even after the master/slave/controller system is transformed. From the results we may conclude that the fundamental properties of the synchronization manifold, the signature of the Jacobian Matrix, hyperbolic equilibrium points and the stability of the system are preserved thus showing that robustness is a consequence of this methodology. The results can be extended to other techniques for the use of feedback design.

References

1. R. Femat, L. Kocarev, L. van Gerven, and M. E. Monsivais-Pérez, "Towards generalized synchronization of strictly different chaotic systems," *Physics Letters A*, vol. 342, no. 33, pp. 247–255, jul 2005.
2. K. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems.* New Jersey, NJ: Prentice Hall, 1989.
3. G. Fernández-Anaya, "Preservation of spr functions and stabilization by substitutions in siso plants," *IEEE Transaction and Automatic Control*, vol. 44, pp. 2171–2174, 1999.
4. B. T. Polyak and Y. Z. Tsypkin, "Stability and robust stability of uniform systems," *Automation and Remote Control*, vol. 57, pp. 1606–1617, 1996.
5. T. E. Djaferis, "Stability preserving maps and robust design," *International Journal of Control*, vol. 75, no. 9, pp. 680 – 690, jun 2002.
6. G. Fernandez-Anaya, J. J. Flores-Godoy, and J. J. Alvarez-Ramirez, *Synchronization Preservation of Dynamical Netwroks in Progress in Statistical Mechanics Research*, J. S. Moreno, Ed. Nova Science Publishers, Inc., 2008.
7. G. Fernández-Anaya, J. J. Flores-Godoy, R. Femat, and J. J. Álvarez Ramírez, "Preservation of stability and synchronization in nonlinear systems," *Physics Letters A*, vol. 371, no. 12, pp. 205–212, 2007.
8. E.-W. Bai and K. E. Lonngren, "Sequential synchronization of two lorenz systems using active control," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 11, no. 7, pp. 1041–1044, jun 2000.
9. B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal control: linear quadratic methods.* Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1990.

On the transitions between dynamical behaviors for small-world and scale-free networks

J. G. Barajas Ramírez and R. Femat

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, IPICYT
División de Matemáticas Aplicadas
San Luis Potosi, S. L. P., C. P. 78216
México
jgbarajas@ipicyt.edu.mx, rfemat@ipicyt.edu.mx

Abstract. The effect of network topology on the transition between dynamical behaviors is investigated for two basic networks: the small-world and scale-free models. In our analysis, we consider a network of identical dynamical systems where each node, prior to being coupled into the network, has a stable equilibrium point. In a recent publication we established that, as the number of nodes in the network increases, the collective dynamics of a repellently coupled network transit from stable to bounded and ultimately to unbounded behavior. In this contribution we investigate how these transitions are affected by the choice of network model. We show that for small-world networks, the stable equilibrium point behavior transits to bounded complex behavior for an interval of network sizes, before becoming unbounded for a sufficiently large number of nodes. While for scale-free networks, the transition from stable fixed point to unbounded behavior occurs directly as the number of nodes increases. To illustrate these results, we use numerical simulations of well known chaotic benchmark systems.
Key Words: Networks, Synchronization, Transitions, Emergence.

1 Introduction

Networks are ensembles of nodes connected by links. As such, representing functional units as nodes and their interactions as links, a network can serve as simplified models for many technological, social and even biological real-world systems [1,2]. Recently, significant research efforts has been focus on analyzing the structural characteristics of such representations. This has lead to the discovery of the small-world [3] and scale-free [4] effects as common features of real-world complex networks. Different construction algorithms have been postulated to capture these key topological aspects. One of the earliest network models that successfully capture some aspects related to the small-world effect was proposed by Erdös and Rènyi (ER) in the 1960´s, in the ER random graph model the structure of complex networks is consider to be the result of a stochastic process of assignment of links between a fixed population of nodes [5]. Watts and Strogatz (WS) proposed in 1998 a network model designed to improve on

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 339-348

ER model [3]. In particular, as to the inability of the ER model to capture the density characteristics of real-world networks. To achieve this, the WS network model proposes the combination of a regular nearest neighbors graph with a stochastic process of rewiring or add a small number of nodes. Since this model is a much better representation of the small-world effect, the WS construction algorithm is also refer to as the small-world network model. The ER and WS network models share a common feature, in both cases the degree distribution follows a Poisson distribution, that is, their connectivity is basically homogeneous, with all nodes having about the same number of nodes. In 1999, Barabási and Albert (BA) proposed an alternative construction algorithm that consists on two processes [4]: *growth* and *preferential attachment*. In the BA algorithm starts with a small number of nodes, at each iteration a new node is added and is coupled to a number of the nodes already existing on the network with a probability directly related to its node degree. The main characteristics of the BA model is that the number of links per node is not fixed to the average for the whole network. In fact, the BA model has a heterogeneous connectivity that follows a Power-law distribution [2], for these reasons the BA construction algorithm is usually refer to as the scale-free network model.Recent works have consider the effect of topological complexity on dynamics for different specific scenarios, from uniformly coupled small-world networks [6], to adaptively weighted scale-free networks [7]; among many others [1,2,8,9]. Unlike most of the previously cited works, we are concern with the transitions of the collective behavior of the network from a synchronized common stable equilibrium point to the emergence of bounded complex behavior, and ultimately, unbounded trajectories. In a recent publication, condition for these transitions, on a network with regular topology, were established in terms of the coupling strength and the number of nodes [10]. In this contribution, we extend those results to consider the effect of complex connectivity. In particular, we investigated how the criteria for transition is changed by choosing small-world or scale-free complex networks.

Throughout the paper, we will consider a network of identical dynamical systems, linearly and diffusively coupled, where each node prior to being coupled into the network has a stable equilibrium point. Under these conditions, the synchronized solution for the entire network, which describes the synchronization manifold, coincides with the dynamical evolution of a single node in isolation [11,6], that is, when synchronization is achieved every node follows a common stable equilibrium point. Then, expressing the dynamics of the network in terms of its deviation from the synchronized solution, a direct relationship can be found between the transverse Lyapunov exponents (tLe) [9], the Lyapunov exponents of an isolated node, and the eigenvalues of the coupling matrix. Furthermore, the network connectivity can chosen such that some of the tLes become positive, resulting on transitions from the synchronized equilibrium point solution to bounded complex oscillations, or even unbounded trajectories. In [10], the criteria for these transitions is express as limit values of the coupling strength and the number of nodes in the network. Using this criteria, we show the effect of complex topology on the conditions for transition between dynamical behaviors.

In Section 2, the conditions for transition are derive as a relation between the *tLes* of the entire network, the Lyapunov exponents of an isolated node, and the network connectivity, described by the eigenvalue spectrum of the coupling matrix. In Section 3, the small-world and scale-free models are described and their effect on the transition between collective behaviors is establish. These results are illustrated with numerical simulations in Section 4. Finally, in Section 5 this contribution is concluded with comments and remarks.

2 Transitions Between Dynamical Behaviors

Consider a network of N linearly and diffusively coupled identical nodes, where each node is a m-dimensional dynamical system with a stable equilibrium point. The state equations describing the dynamics of the entire network are given by [10]:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) - c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j(t), \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{1}$$

where $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), ..., x_{im}(t)]^\top \in \mathbf{R}^m$ are state variables of the ith node; $f(\cdot) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ describes the dynamics of an isolated node; the constant $c > 0$ is the coupling strength between any two nodes in the network. The network connectivity is describe by its coupling matrix $\mathcal{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbf{R}^{N\times N}$, where $a_{ij} \in [0, 1]$ is set to one if there is a link between ith and jth nodes and to zero if they are not connected. Diffusive coupling refers to:
(I) Symmetric entries ($a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j, j \neq i$);
(II) Null sum by rows and columns ($\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = \sum_{j=1}^{N} a_{ji} = 0$, $\forall i$), with the diagonal elements are given by

$$a_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ij} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ji}, \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{2}$$

For a diffusively coupled network with no isolated nodes, the eigenvalues of $\mathcal{A}$ are [12]:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ... \geq \lambda_N \tag{3}$$

An isolated node, described by $\dot{x} = f(x)$, can be characterized in terms of its Lyapunov exponents, h_i, given by [13]:

$$h_i = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} |J(t, x_0)u_i|, \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{4}$$

where $J(t, x_0)$ is the Jacobian matrix of $f()$ evaluated at a randomly selected initial condition x_0 with $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ is a set of orthonormal vectors in the tangent space of the system. Notice that the m Lyapunov exponents of a node, prior to being coupled into the network, are strictly negative and can be ordered as:

$$0 > h_1 \geq h_2 \geq ... \geq h_m \tag{5}$$

A network is said to be synchronized if the trajectories of every node move at unison, in the sense that:

$$x_i(t) = x_j(t) = \bar{x}(t), \quad \forall\, i, j \text{ as } t \to \infty. \tag{6}$$

where $\bar{x}(t)$ is the synchronized state, which coincides with the dynamics of a node in isolation ($\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x})$ and by construction is a solution for the entire network.

In the mN-dimensional state space the synchronized solution describes a diagonal m-dimensional manifold usually called the synchronization manifold [6.11]. The collective dynamics of the network can be characterized in terms of the divergence of the trajectories of its nodes from the synchronized solution $\bar{x}$. Furthermore, the stability of the synchronized behavior can be determine directly from the transverse Lyapunov exponents [9,14,10], which are obtained as follows:

Defining the synchronization error as $\xi_i(t) = x_i(t) - \bar{x}(t)$. A variational equation is obtained linearizing around the synchronized state

$$\dot{\xi}_i(t) = J(x(t))\xi_i(t) - c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\xi_j(t), \quad i = 1, 2, ..., N \tag{7}$$

which in vector form becomes

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = J(x(t))\mathcal{X}(t) - c\mathcal{X}(t)\mathcal{A}^{\top} \tag{8}$$

where $\mathcal{X}(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_N(t)] \in \mathbf{R}^{m\times N}$. Notice that by construction the coupling matrix satisfies:

$$\mathcal{A} = \Gamma\Lambda\Gamma^{-1} \tag{9}$$

where $\Gamma = [\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_N] \in \mathbf{R}^{N\times N}$; and $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in \mathbf{R}^{N\times N}$; with γ_i the i-th eigenvector of $\mathcal{A}$ and λ_i its corresponding eigenvalue.

In terms of (9), the variational equation (8) becomes:

$$\dot{\nu}_k(t) = J(x(t))\nu_k(t) - c\lambda_k\nu_k(t), \quad k = 1, 2, ..., N \tag{10}$$

where $\nu_k(t) = \mathcal{X}(t)\gamma_k \in \mathbf{R}^m$. Then, applying the definition of Lyapunov exponent in (4) to the variational equation (10). One gets the entire spectrum of *tLe*s for the network as:

$$\mu_i(\lambda_k) = h_i - c\lambda_k, \tag{11}$$

for $i = 1, 2, ..., m$, and $k = 1, 2, ..., N$.

The spectrum of *tLe*s inherit, from (3) and (5), the following order:

$$\begin{aligned} &\mu_i(\lambda_N) \geq \mu_i(\lambda_{N-1}) \geq ... \geq \mu_i(\lambda_2) \geq \mu_i(\lambda_1) \\ &\mu_1(\lambda_k) \geq \mu_2(\lambda_k) \geq ... \geq \mu_{m-1}(\lambda_k) \geq \mu_m(\lambda_k) \end{aligned} \tag{12}$$

for $i = 1, 2, ..., m$ and $k = 1, 2, ..., N$.

The stability of the collective behavior around the synchronization manifold can be determine from the sign of the *tLe*s. From (12), the largest *tLe* is $\mu_1(\lambda_N)$.

Then, if $\mu_1(\lambda_N) < 0$, all the nodes synchronize to a common stable equilibrium point. However, if the connectivity is such the eigenvalues of $\mathcal{A}$ make some of the *tLe*s positive, then, some of the trajectories move away from the synchronized solution, but if the synchronization manifold remains attractive the trajectories remain bounded. In [10] this situation is refer to as the emergence of bounded behavior. Alternatively, if the eigenvalues of the coupling matrix make a large enough number of *tLe* positive, then the trajectories become unbounded at least for one node.

These conditions for transition between behaviors can be expressed as follows [10]:
(I) The network will synchronize to a common stable equilibrium point if $\mu_1(\lambda_N) < 0$, or equivalently

$$|h_1| > c|\lambda_N| \tag{13}$$

(II) Bounded behavior will emerge in the network if:
(II.1) A small number (τ T with $1 < \tau < m$ and $1 < T < N$) of *tLe*s are positive with the remaining *tLe*s are negative ($\mu_\tau(\lambda_T) < 0$), or equivalently

$$|h_1| < c|\lambda_N| \text{ and } c|\lambda_T| < |h_\tau| \tag{14}$$

(II.2) Additionally, the overall sum of *tLe*s for each node must be negative for every node; that is,

$$\sigma_i = \sum_{i=1}^{m} h_i - c\lambda_k < 0 \text{ for every } k \tag{15}$$

It should be noted that in this case the network is not synchronized, the trajectories move away from the equilibrium point, yet they remain bounded since the equilibrium solution remains attractive. In this situation, the folding and stretching mechanisms may allow for the network to exhibit complex chaotic oscillations.
(III) Ultimately, unbounded trajectories result if the positive *tLe*s are such that the sum of any of the nodes is positive, that is

$$\sigma_i = \sum_{i=1}^{m} h_i - c\lambda_k > 0 \text{ for any } k \tag{16}$$

These conditions for the transition from one behavior to another depend directly on the eigenvalues of the connectivity matrix. Since different topologies have different eigenvalue spectrums, in the following section we investigate the effect of two conventional network models on the transitions between collective behaviors.

3 Models of Network Topology

In order to investigate the effect of network topology on the transitions between behaviors, we look at two benchmark models: small-world and scale-free networks. From the criteria for transition in (13)-(16) one can see that the most

important aspect to consider is the eigenvalue spectrum of the coupling matrix obtained using each of these models. In particular, two aspects must be considered: (1) the value of the smallest (most negative) eigenvalue, λ_N, since it determines the stability of synchronization towards the equilibrium point. And (2) the dispersion of the eigenvalues, as can be seen from (15) and (16) a larger dispersion makes it more likely to have a positive overall sum even with only a few positive *tLes*. In this contribution, we measure the dispersion of the eigenvalues of $\mathcal{A}$ calculating the following indicator:

$$\rho = \frac{|\lambda_N| - |\lambda_2|}{|\lambda_N|} \tag{17}$$

Then, the dispersion has its minimum ($\rho = 0$) when the eigenvalues are equal, which is the case for a regular globally coupled network; and its maximum ($\rho \approx 1$) when their difference is largest, this happens for a regular star coupled network.

3.1 Small-World Network Model

The coupling matrix of a network with small-world coupling structure can be constructed using the following two-step process [11]:

1. **Regular**: Construct a regular nearest-neighbors connectivity matrix $\mathcal{A}_{nn}$ of size N, by symmetrically letting the two neighboring entries forwards and backwards of each node be turn to one.
2. **Random**: With probability $0 < p_{sw} < 1$, add connections to the network by symmetrically making the corresponding zero entries of $\mathcal{A}_{nn}$ into ones ($a_{ij} = a_{ji} = 1$) and adjusting the diagonal elements of the resulting matrix $\mathcal{A}_{sw}$, such that the diffusive requirements (2) and (3) are satisfied.

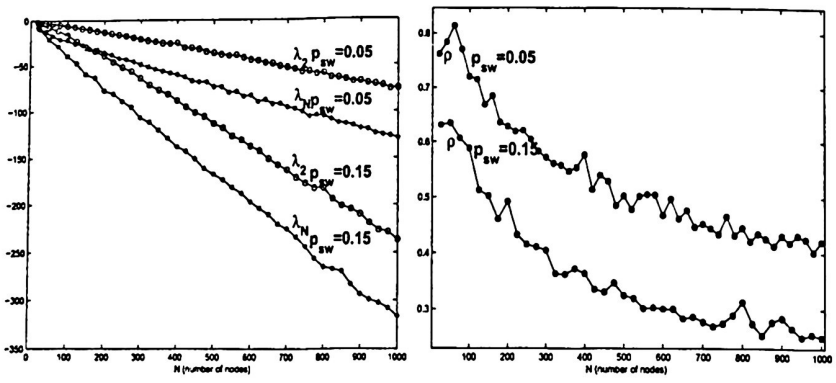


Fig. 1. Left The largest non zero ($\lambda_{sw,2}$) and smallest ($\lambda_{sw,N}$) eigenvalues of $\mathcal{A}_{sw}$. **Right** The dispersion of the eigenvalue spectrum of $\mathcal{A}_{sw}$ for different number of nodes. (Average over twenty realizations for each probability p_{sw})

In Figure 1-Left, the largest ($\lambda_{sw,2}$) and smallest ($\lambda_{sw,N}$) nonzero eigenvalues of $\mathcal{A}_{sw}$ are presented as a function of the number of nodes in the network for a given probability of adding connections. Examining the nonzero eigenvalues of $\mathcal{A}_{sw}$ it can be seen that all of them growth along with the size of the network. In Figure 1-Right, the dispersion of the eigenvalues of $\mathcal{A}_{sw}$ is shown as a function of the number of nodes in the network. It can be seen that as the network growths the eigenvalues become more compacted.

From the observations above, the following can be established for a network with a small-world coupling configuration ($\mathcal{A}_{sw}$):
(I) There will be a critical value of N after which positive *tLe*s will be generated for any given coupling strength. (II) The number of positive *tLe*s will growth larger as the number of nodes in the network increases.
(III) Since the dispersion of the eigenvalues tends to be more compacted, there will be a set of values for which τT positive *tLe*s will be such that at the same time the sum (15) remains negative. In this situation, complex bounded trajectories can be generated in the overall behavior of the network (See Figure 3 in the following Section).
Ultimately, for a large enough number of nodes, the trajectories will become unbounded. (See Figure 3 in the following Section)

3.2 Scale-Free Networks

The connectivity matrix of a network with a scale-free topology can be constructed using the following algorithm [4]:
1. **Growth**: Initially there are m_0 nodes, then every time step a new node is added and connected to m_1 of the existing nodes by setting the entries of the connectivity matrix $\mathcal{A}_{sf}$ to one ($a_{ij} = a_{ji} = 1$) and adjusting the diagonal elements ($a_{ii} = -\sum_{j \neq i} a_{ij}$) such that the sum by rows remains zero.
2. **Preferential Attachment**: The nodes in the network, which are connected to the new node, are chosen with a probability $0 < p_{sfi} < 1$. The probability p_{sf} is a function of the node degree (k_i), which is defined as the number of edges connecting to a node. In this way, the probability of connecting the new node j to the existing node i, is given by $p_{sf}(j \rightarrow i) = \frac{k_i}{\sum_l k_l}$

In Figure 2-Left, the largest non-zero ($\lambda_{sf,2}$) and the smallest ($\lambda_{sf,N}$) eigenvalues of the connectivity matrix for a scale-free network ($\mathcal{A}_{sf}$) are shown for different number of nodes. In this case one can observe that as the number of nodes increases, the largest non zero eigenvalue remains basically constant ($\lambda_{sf,2} \approx -1$), while the smallest eigenvalue growths proportionally with the network size ($\lambda_{sf,N} \approx -N$). In Figure 2-Right, the dispersion of the eigenvalues spectrum of $\mathcal{A}_{sf}$ is shown as a function of the number of nodes in the network. One can see that as the number of nodes in the network growths the dispersion tends towards its maximum at one ($\rho_{sf} \approx 1$).

Taking into account this results, for a network with scale-free coupling structure ($\mathcal{A}_{sf}$) the following can be established:
(A) There will be a critical value of N after which positive *tLe*s will be generated

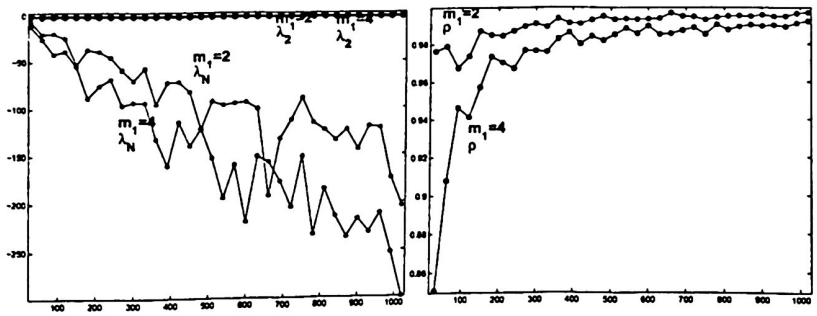


Fig. 2. Left The largest non zero $(\lambda_{sf,2})$ and smallest $(\lambda_{sf,N})$ eigenvalues of $\mathcal{A}_{sf}$. **Right** The dispersion of the eigenvalue spectrum of $\mathcal{A}_{sf}$ for different number of nodes. (The numerical values are average over twenty realizations with $m_0 = 4$ $m_1 = 4, 2$)

for any given coupling strength, yet this will be the case only for some of the eigenvalues of $\mathcal{A}_{sf}$ (the ones near λ_N) with the remaining eigenvalues remaining constant (the ones near λ_2).

(B) The number of positive *tLe*s will remain basically the same as the number of nodes increases, yet the value for the smallest eigenvalues will growth with the number of nodes.

(C) The large dispersion between the eigenvalues will allow for a large enough number of nodes that there will be positive *tLe*s with a negative sum for (15), in this situation the trajectories remain bounded but no complex oscillations can be observed.

Finally, for a sufficiently large N the positive *tLe*s will be large enough to make the sum (16) positive. In this case, the network will transit from a stable equilibrium point to a unbounded trajectories for the hub nodes (See Figure 4 in the Section 5).

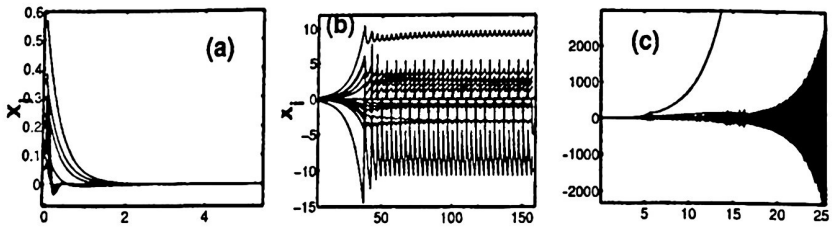


Fig. 3. Illustrative example of the effect of topology on the transitions between behavior for a small-world network of Lorenz systems with a stable equilibrium point. (a) four (b) fifteen and (c) Twenty five nodes.

4 Illustrative Example

For illustrative purposes consider a network with each node is a Chen system [15] with a stable equilibrium point. We assume that the nodes are coupled linearly and diffusively according to the small-world algorithm presented in the previous Section, and further consider that the coupling strength is fixed at $c = 0.2$. As discussed in the above, under these conditions for a small number of nodes, all nodes will have a common equilibrium point (See Figure 3(a) $N = 4$), as the number of nodes increases the conditions on (14) and (15) are satisfied and bounded complex oscillations can be observed (See Figure 3(b) $N = 15$); finally for a large number of nodes, the trajectories become unbounded (See Figure 3(c) $N = 25$)

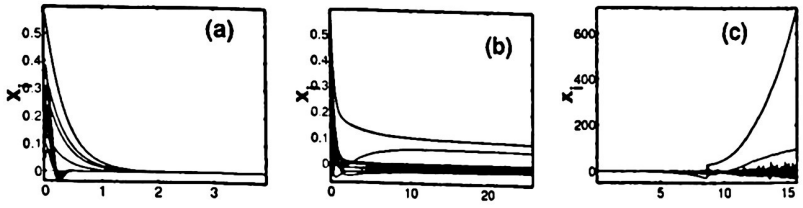


Fig. 4. Illustrative example of the effect of topology on the transitions between behavior for a scale-free network of Lorenz systems with a stable equilibrium point. (a) Four (b) Fifteen and (c) Twenty nodes.

Then, consider that the nodes are coupled linearly and diffusively according to the scale-free algorithm presented above for a fixed coupling strength $c = 0.2$. In this case, for a small number again all nodes will have a common equilibrium point (See Figure 4(a) $N = 4$), as the number of nodes increases where both conditions (14) and (15) are satisfied, the trajectories of the network remain bounded but only the hub node is moves away from the synchronized solution (See Figure 4(b) $N = 15$); finally for a large number of nodes, the trajectories of the hub node become unbounded long before the rest of the nodes move away from the common equilibrium point (See Figure 4(c) $N = 20$)

5 Concluding Remarks

We extended the results on the transition between behaviors for networks of coupled dynamical systems presented in [10] to include the cases of networks with small-world and scale-free topology. Analyzing differences,in terms of values and dispersion of the eigenvalue spectrums generated by each of these network models, we established that network with small-world topology tend to have an interval of values for the number of nodes (N) such that complex oscillations can

be observed. On the other hand, network with scale-free topology will tend to transit directly from a stable bounded behavior to a state where at least the hub nodes become unbounded. Therefore, scale-free networks do not have a window of values where complex oscillations may occur. This difference in the transitions results from a fundamental difference in the connectivity of these models and may have significant implications for the design of real-world networks. These issues require further investigation, which will be reported elsewhere.

Acknowledgments

This work was partially supported by a CONACyT under grants 48307-R and 50870.

References

1. Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D.U.: Complex networks: Structure and dynamics. Phys Rep **424** (2006) 175–308
2. Newman, M., Barabasi, A.L., J., W.D. In:. Princeton University Press, New Jersey, USA. (2006)
3. Watts, D.J., Strogatz, S.H.: Collective dynamics of 'small world' networks. Nature **393** (1998) 440–442
4. Barabási, A.L., Albert, R.: Emergence of scaling in random networks. Science **286** (1999) 509–512
5. Bollobás, B. In:. Academic Press, New York, USA. (2001)
6. Barahona, M., Pecora, L.M.: Synchronization in small-world systems. Phys Rev E **89** (2002) 054101
7. Zhou, C., Kurths, J.: Dynamical weights and enhanced synchronization in adaptive complex networks. Phys Rev E **96** (2006) 164102
8. Kuramoto, Y. In: (Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators.)
9. Ding, M., Yang, W.: Stability of synchronous chaos and on-off intermittency in coupled map lattices. Phys Rev E **56** (1997) 4009–4016
10. Barajas-Ramirez, J. B., Femat, R.: Transitions to complex behavior in networks of coupled dynamical systems. In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul Korea (2008)
11. Wang, X.F., Chen, G.: Complex networks: Small-world, scale-free and beyond. IEEE Control Syst Maggazine (2003) 6–20
12. Wu, C.W., Chua, L.O.: Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. IEEE Trans. Circ. Syst. I. **42** (1995) 430–447
13. Ott, E. In:. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain (1993)
14. Chen, Y., Rangarajan, G., Ding, M.: General stability analysis of synchronized dynamics in coupled systems. Phys Rev E **67** (2003) 026209
15. Chen, G., Ueta: Yet another chaotic attractor. I. J. Bifurcation and Chaos **9** (1999) 1465–1466

Synchronisation of a Class of Nonlinear Time-Delay Systems Applied to Two Unidirectionally Coupled External Cavity Laser Diodes

O. Hugues-Salas[1], K. A. Shore[1], S. P. Banks[2] and D. A. Díaz-Romero[3]

[1] School of Electronic Eng., Bangor University, Dean Street, Bangor, LL57 1UT, United Kingdom. o.hugues-salas and k.a.shore @bangor.ac.uk
[2] Dept. of Automatic Control and Systems Eng., The University of Sheffield, Mappin Street, Sheffield, S1 3JD, United Kingdom. S.Banks@sheffield.ac.uk
[3] Universidad Politécnica de Victoria, Czda. Gral. Luis Caballero 1200, Col. del Maestro, 87070, Cd. Victoria Tamaulipas, México. dadrmty@yahoo.com

Abstract. This paper shows the partial-state synchronisation of a class of nonlinear time-delay systems by means of an approximating sequence technique and optimal control. The approximating sequence technique reduces a nonlinear time-delay system into a sequence of linear time-varying (LTV) equations, in order to approximate to the solution of the original nonlinear system. In each of these equations, the linear optimal regulator problem is utilised in order to minimise the error between the drive system and the response system. Once the error signal is close enough to zero, then the drive and response systems are synchronous. The procedure is employed in the synchronisation of two unidirectionally coupled chaotic external cavity laser diodes using numerical simulations.

1 Introduction

The synchronisation of chaotic systems is a subject that has been receiving a lot of attention of researchers throughout many years. Since the seminal paper of Pecora and Carroll [1], the chaotic synchronisation research field has been intensively studied due to its potential use for secure communications. Synchronised chaotic systems might be identical or different, the coupling between them may be unidirectional (drive-response or master-slave coupling) or bi-directional (mutual coupling) and the driving force can be deterministic or stochastic.

In the field of lasers, many research groups have focused their attention on understanding the chaotic synchronisation phenomena in unidirectionally coupled lasers and its potential utilisation in secure communications. The external cavity laser diodes or semiconductor lasers subject to optical feedback present a diversity of behaviours [2]. The reflected light from the optical feedback might create chaos in the laser dynamics. Hence, a lot of research is concentrated on suppressing this kind of dynamics. Nevertheless, current studies are taking advantage of these chaotic dynamics in order to employ them for hiding messages and then, by synchronising the oscillations, the messages can be extracted.

M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 349-358

Semiconductor lasers with optical feedback can be modelled by delay differential equations. A well-known theoretical description of the system is the Lang-Kobayashi model [3], which provides an effective representation of the dynamics produced by semiconductor lasers optically coupled with a distant reflector.

Mirasso, Colet et al. [4] numerically demonstrated the synchronisation of two chaotic semiconductor lasers with optical feedback when a small amount of output intensity from one is injected into the other. They also showed the codification and decodification of a message in a chaotic carrier. Sivaprakasam and Shore [5] were the first to demonstrate experimentally the synchronisation of two unidirectionally coupled chaotic external cavity laser diodes.

The numerical analyses of synchronisation of semiconductor lasers with optical an optoelectronic feedback have been studied in [6, 7, 8], and references therein. In [6], the synchronisation has been obtained provided the operation conditions are adequate and the parameter regions in which synchronisation is achieved are presented. In [7], complete and time lag synchronisations in unidirectionally coupled semiconductor lasers are studied, in which it is shown how the degree of synchronisation decreases with mismatch in the laser parameters between the transmitter and receiver. In [8], it is demonstrated that the coupling strength between drive and response influences the quality of synchronisation.

Recent works on synchronisation of time-delay systems are: [9] applies the Generalized Hamiltonian forms and observer approach to synchronise time-delay-feedback Chua's circuits in order to transmit encrypted signals, [10] uses adaptive control theory for the stabilisation and synchronisation of chaotic Lur'e systems with time-varying delay, and [11] proposes a crypto-system based on a chaotic time delay model that uses the synchronisation of chaotic signals which is executed through a nonlinear state observer design.

In this paper, the partial-state synchronisation of a class of nonlinear time-delay systems is presented. The method uses an approximating sequence technique [12] that approximates to the solution of nonlinear systems by producing a sequence of LTV equations; then in each of these equations, the linear optimal regulator problem is applied in order to minimise the error between the drive system and the response system. After the error signal is minimised, the signals of the drive and response systems are synchronised. The proposed method is applied numerically to the synchronisation of two unidirectionally coupled chaotic external cavity laser diodes, in which the coupling between the drive and response can be observed in the controller. This controller contains the error signal between the drive and response. The advantage of this method is that there is no need to adjust the coupling strength between the drive and response, and it is not required to tune the feedback strengths of the external cavities of each laser. In addition, the parameter mismatches between the drive and response are compensated for, consequently, it is not a requirement that the lasers are identical. Also, it is not necessary to use parameter regions in which synchronisation occurs because the method works in all operating points of the phase space.

This paper is divided as follows: in Sect.2, the approximating sequence technique is briefly introduced. The procedure of the synchronisation of nonlinear

time-delay systems using the approximating sequence technique and linear optimal control is shown in Sect.3. The application of the method for synchronising semiconductor lasers subject to optical feedback is described in Sect.4. Finally, conclusions are given in Sect.5.

2 The Approximating Sequence Technique

This section recalls the method that approximates to the solution of nonlinear systems [12, 13, 14]. Given a nonlinear system of the form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \ , \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \ , \end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{x}(t)$ is a n-dimensional state vector, $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ and $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ are nonlinear matrix-valued functions of $\mathbf{x}(t)$ which are locally Lipschitz, and $\mathbf{u}(t)$ is a m-dimensional unconstrained control vector.

The above system can be replaced by a sequence of LTV approximations

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{[1]}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^{[1]}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}^{[1]}(t) \ , \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}^{[i]}(t) &= \mathbf{A}\Big(\mathbf{x}^{[i-1]}(t)\Big)\mathbf{x}^{[i]}(t) + \mathbf{B}\Big(\mathbf{x}^{[i-1]}(t)\Big)\mathbf{u}^{[i]}(t) \ , \end{aligned} \tag{2}$$

where the initial conditions are: $\mathbf{x}^{[1]}(t_0)=\mathbf{x}^{[2]}(t_0)=\ldots=\mathbf{x}^{[i]}(t_0)=\mathbf{x}_0$.

The solution of each of the approximations converges to the solution of the original nonlinear system.

Since the sequence of approximations is formed by linear differential equations, then linear control techniques can be implemented to each of the equations. That is, the control of nonlinear systems can be approached by linear control techniques through applying the approximating sequence technique. This is providing that the nonlinear system fulfils the local Lipschitz requirement.

3 Synchronisation of Nonlinear Time-Delay Systems

This section shows the synchronisation between two nonlinear time-delay systems of the form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_\tau(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{z}(t) \ , \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\xi}(t), \quad t\in[t_0-\tau,t_0) \ , \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \ , \end{aligned} \tag{3}$$

where $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ is a state vector, $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ and $\mathbf{A}_\tau\in\mathbb{R}^{n\times n}$ are nonlinear matrix-valued functions of $\mathbf{x}(t)$ which are locally Lipschitz, $\mathbf{z}(t)\in\mathbb{R}^n$ is a forcing vector, τ is the time delay, a positive constant, and $\boldsymbol{\xi}(t)$ is a history function.

The synchronisation is accomplished by utilising the approximating sequence

technique in combination with the linear optimal regulator problem. The procedure is explained as follows.

Consider a nonhomogeneous nonlinear time-delay system

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{d}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) \ , \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{d}}(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0) \ , \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \ , \end{aligned} \tag{4}$$

as the drive system. The corresponding response system is

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-\tau))\mathbf{y}(t) + \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-\tau))\mathbf{y}(t-\tau) \\ &\quad + \mathbf{B}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-\tau))\mathbf{u}(t) + \mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t) \ , \\ \mathbf{y}(t) &= \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{r}}(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0) \ , \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \ , \end{aligned} \tag{5}$$

where $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ and $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ is an unconstrained control vector. The term $\mathbf{B}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-\tau))\mathbf{u}(t)$ is added to the response system in order to minimise the error given by $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$. Once $\mathbf{e}(t)$ is minimised, then $\mathbf{x}(t)$ and $\mathbf{y}(t)$ are synchronous.

By differentiating the error and by simplifying, the next equation is created

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\psi}(t))\mathbf{e}(t) + \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(\boldsymbol{\psi}(t))\mathbf{e}(t-\tau) + \big(\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{\chi}(t)) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\psi}(t))\big)\mathbf{x}(t) + \\ &\quad \big(\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}(\boldsymbol{\chi}(t)) - \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(\boldsymbol{\psi}(t))\big)\mathbf{x}(t-\tau) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\psi}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) - \mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t) \ , \\ \mathbf{e}(t) &= \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{e}}(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0) \ , \\ \mathbf{e}(t_0) &= \mathbf{e}_0 \ . \end{aligned} \tag{6}$$

where $(\boldsymbol{\chi}(t)) \triangleq (\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))$ and $(\boldsymbol{\psi}(t)) \triangleq (\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-\tau))$.

Decomposing (6) into a sequence of LTV equations produces

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^{[1]}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\psi}_0)\mathbf{e}^{[1]}(t) + \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(\boldsymbol{\psi}_0)\mathbf{e}^{[1]}(t-\tau) + \big(\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{\chi}_0) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\psi}_0)\big)\mathbf{x}^{[1]}(t) \\ &\quad + \big(\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}(\boldsymbol{\chi}_0) - \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(\boldsymbol{\psi}_0)\big)\mathbf{x}^{[1]}(t-\tau) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\psi}_0)\mathbf{u}^{[1]}(t) + \mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) - \mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t) \ , \\ \dot{\mathbf{e}}^{[i]}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{r}}\Big(\boldsymbol{\psi}^{[i-1]}(t)\Big)\mathbf{e}^{[i]}(t) + \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}\Big(\boldsymbol{\psi}^{[i-1]}(t)\Big)\mathbf{e}^{[i]}(t-\tau) + \Big(\mathbf{A}_{\mathrm{d}}\Big(\boldsymbol{\chi}^{[i-1]}(t)\Big) \\ &\quad - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}\Big(\boldsymbol{\psi}^{[i-1]}(t)\Big)\Big)\mathbf{x}^{[i]}(t) + \Big(\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}\Big(\boldsymbol{\chi}^{[i-1]}(t)\Big) - \\ &\quad \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}\Big(\boldsymbol{\psi}^{[i-1]}(t)\Big)\Big)\mathbf{x}^{[i]}(t-\tau) - \mathbf{B}\Big(\boldsymbol{\psi}^{[i-1]}(t)\Big)\mathbf{u}^{[i]}(t) + \mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) - \mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t) \ . \end{aligned} \tag{7}$$

where $(\boldsymbol{\chi}_0) \triangleq (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$ and $(\boldsymbol{\psi}_0) \triangleq (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)$, $\big(\boldsymbol{\chi}^{[i-1]}(t)\big) \triangleq \big(\mathbf{x}^{[i-1]}(t), \mathbf{x}^{[i-1]}(t-\tau)\big)$ and $\big(\boldsymbol{\psi}^{[i-1]}(t)\big) \triangleq \big(\mathbf{y}^{[i-1]}(t), \mathbf{y}^{[i-1]}(t-\tau)\big)$.

The first approximation is chosen as a linear time-invariant equation. By applying the approximating sequence technique, the drive system $\big(\dot{\mathbf{x}}(t)\big)$ in (4) can be reduced into a sequence of LTV approximations. The solution of the first approximation, $\mathbf{x}^{[1]}(t)$, is replaced in $\dot{\mathbf{e}}^{[1]}(t)$ in order to obtain the solution

of the first approximation $\mathbf{e}^{[1]}(t)$. Then, for the subsequent approximation, the solution of $\mathbf{y}^{[1]}(t)$ from $\mathbf{e}^{[1]}(t)=\mathbf{x}^{[1]}(t)-\mathbf{y}^{[1]}(t)$ must be calculated. With the solutions of the first approximation $\left(\mathbf{x}^{[1]}(t)\right.$ and $\left.\mathbf{y}^{[1]}(t)\right)$ and the solution $\mathbf{x}^{[2]}(t)$, the approximation $\mathbf{e}^{[2]}(t)$ can be found, and then $\mathbf{y}^{[2]}(t)$ is obtained. The same procedure follows for obtaining the solution of the ith approximation $\mathbf{e}^{[i]}(t)$. The next technique shows how the controller $\mathbf{u}^{[i]}(t)$ is designed.

Consider the ith approximation

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(t) = {} & \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T)\mathbf{e}(t) + \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\mathbf{e}(t-\tau) + \left(\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(T) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T)\right)\mathbf{x}(t) + \\ & \left(\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}(T) - \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\right)\mathbf{x}(t-\tau) - \mathbf{B}(T)\mathbf{u}(t) + \mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) - \mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t)\ ,\end{aligned} \tag{8}$$

where $(t, t-\tau)\triangleq(T)$. This equation is a LTV time-delay equation. Note that at the ith iteration, the approximations $\left(\mathbf{x}^{[i-1]}(t), \mathbf{x}^{[i-1]}(t-\tau)\right)$ and $\left(\mathbf{y}^{[i-1]}(t),\right.$ $\left.\mathbf{y}^{[i-1]}(t-\tau)\right)$ are known, hence the equations in (7) are all of the form (8).

The finite-time linear quadratic cost functional

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{f}})\mathbf{F}(t_{\mathrm{f}})\mathbf{e}(t_{\mathrm{f}}) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}} \left\{\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)\right\}dt\ , \tag{9}$$

together with (8) minimise the error $\mathbf{e}(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)$. Where the terminal state $\mathbf{e}(t_{\mathrm{f}})$ is required to be as close as possible to the zero state. $\mathbf{F}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ and $\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ are symmetric positive semi-definite and $\mathbf{R}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ is symmetric positive definite. The problem of determining an input $\mathbf{u}(t)$, $t_0\le t\le t_f$, for which the criterion (9) is minimal is called the Linear Optimal Regulator Problem.

Using (8) and the cost function (9), the Hamiltonian for this problem is

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\left(\mathbf{e}(t), \mathbf{e}(t-\tau), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t, t-\tau\right) = {} & \frac{1}{2}\left[\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)\right] + \\ & \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\left\{\mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T)\mathbf{e}(t) + \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\mathbf{e}(t-\tau) + \left(\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(T) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T)\right)\mathbf{x}(t) + \right. \\ & \left.\left(\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}(T) - \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\right)\mathbf{x}(t-\tau) - \mathbf{B}(T)\mathbf{u}(t) + \mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) - \mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t)\right\}\ .\end{aligned} \tag{10}$$

The optimality conditions are:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{e}} - \left.\frac{\partial \mathbf{H}(t')}{\partial \mathbf{e}(t-\tau)}\right|_{t'=t+\tau} = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{\lambda}(t) - \\ \qquad\qquad \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\boldsymbol{\lambda}(t+\tau), \quad t_0 \le t < t_{\mathrm{f}} - \tau\ , \\ -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{e}} = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{\lambda}(t) \qquad t_{\mathrm{f}} - \tau \le t \le t_{\mathrm{f}}\ . \end{cases} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_{\mathrm{f}}) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}(t_{\mathrm{f}})} = \mathbf{F}(t_{\mathrm{f}})\mathbf{e}(t_{\mathrm{f}})\ , \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}(T)\ . \tag{13}$$

The optimal control law, which can be obtained from (13) is

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{\lambda}(t)\ . \tag{14}$$

The adjoint vector is defined as

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t) + \mathbf{g}(t) \ , \tag{15}$$

which is used in order to decouple equations (11), (14) and (8). $\mathbf{P}(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, is symmetric and positive-definite and is the solution of the matrix Riccati differential equation. $\mathbf{g}(t)\in\mathbb{R}^n$ is used for compensating for the dynamics produced by the time-delay term, the forcing terms and the LTV terms.

After substituting (15) in (14) the controller is produced

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(T)\big(\mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t) + \mathbf{g}(t)\big) \ . \tag{16}$$

By taking the derivative of (15) and by substituting (8) and (16) into the result, the equation can then be equated to each case of the costate equation (11) after having substituted (15) into each of them. This yields the Riccati equation

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(T)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(T)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}(T)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T) \ , \tag{17}$$

which can be calculated for the time span $[t_0, t_{\mathrm{f}}]$, and the compensating vector

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{g}}(t) = {} & \Big(\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(T)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(T) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}(T)\Big)\mathbf{g}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\mathbf{e}(t-\tau) - \\ & \mathbf{P}(t)\mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t) - \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}^{\mathrm{T}}(T+\tau)\Big(\mathbf{P}(t+\tau)\mathbf{e}(t+\tau) + \mathbf{g}(t+\tau)\Big) \\ & - \mathbf{P}(t)\Big[\big(\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(T) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T)\big)\mathbf{x}(t) + \big(\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}(T) - \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\big)\mathbf{x}(t-\tau)\Big] \ , \qquad (18a) \\ & \qquad\qquad \text{for} \quad t_0 \le t < t_{\mathrm{f}} - \tau \ , \\ \dot{\mathbf{g}}(t) = {} & \Big(\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(T)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(T) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}(T)\Big)\mathbf{g}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\mathbf{e}(t-\tau) \\ & - \mathbf{P}(t)\mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t) - \mathbf{P}(t)\Big[\big(\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(T) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T)\big)\mathbf{x}(t) + \qquad (18b) \\ & \big(\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}(T) - \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\big)\mathbf{x}(t-\tau)\Big] \ , \qquad\qquad \text{for} \quad t_{\mathrm{f}} - \tau \le t \le t_{\mathrm{f}} \ , \end{aligned}$$

where $(t+\tau, t) \triangleq (T+\tau)$.

Equations (17) and (18) can be solved by numerically integrating them backwards in time, from t_{f} to t_0, starting from the final conditions $\mathbf{P}(t_{\mathrm{f}})=\mathbf{F}(t_{\mathrm{f}})$ and $\mathbf{g}(t_{\mathrm{f}})=0$. These terminal conditions are found by equating (12) and (15) at t_{f}.

Once $\mathbf{P}(t)$ and $\mathbf{g}(t)$ are calculated, then the results are substituted into (16) in order to produce the controller. After finding $\mathbf{u}(t)$, then this is substituted in (8) for producing the minimised error signal

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(t) = {} & \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T)\mathbf{e}(t) + \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\mathbf{e}(t-\tau) + \big(\mathbf{A}_{\mathrm{d}}(T) - \mathbf{A}_{\mathrm{r}}(T)\big)\mathbf{x}(t) + \big(\mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{d}}}(T) - \qquad (19) \\ & \mathbf{A}_{\tau_{\mathrm{r}}}(T)\big)\mathbf{x}(t-\tau) - \mathbf{B}(T)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(T)\big(\mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t) + \mathbf{g}(t)\big) + \mathbf{z}_{\mathrm{d}}(t) - \mathbf{z}_{\mathrm{r}}(t) \ . \end{aligned}$$

This procedure must be performed in each approximation of the sequence of linear differential equations of (7) until the error signal $\mathbf{e}(t)$, on the ith iteration, tends towards zero.

4 Synchronisation of Chaotic Dynamics in Semiconductor Lasers with Optical Feedback

The dynamics of a semiconductor laser with optical feedback can be represented by using the Lang-Kobayashi equations [3]. These equations describe the effect of weak-to-moderate optical feedback on laser diodes. This set of equations shows the evolution of the complex electric field $E(t)$ and the carrier density $N(t)$. The effect of the optical feedback, which can be generated by an external reflector or mirror, is included in the model by a time-delayed complex electric field term, producing a nonlinear time-delay differential equation.

The optical feedback in lasers diodes can destabilise their dynamics creating chaos. The appearance of chaotic dynamics in semiconductor lasers with optical feedback can be utilised in order to develop private communications systems by exploiting this behaviour. One way of taking advantage of the chaotic behaviour of this laser configuration for communication purposes is to synchronise the signals between two lasers. The synchronisation of semiconductor lasers subject to optical feedback have received a lot of attention due to its potential application for secure communications. This section presents the synchronisation of two unidirectionally coupled external cavity laser diodes by applying the approximating sequence technique and the linear optimal regulator problem.

The dimensionless form of the Lang-Kobayashi rate equations [15] can be written in polar coordinates

$$\begin{aligned}
\frac{dE(t)}{dt} &= N(t)E(t) + \eta E(t-\tau)\cos(\phi(t-\tau) - \phi(t) - \omega_0\tau_e) \ , \\
\frac{d\phi(t)}{dt} &= \alpha N(t) + \eta\frac{E(t-\tau)}{E(t)}\sin(\phi(t-\tau) - \phi(t) - \omega_0\tau_e) \ , \\
T\frac{dN(t)}{dt} &= P - N(t) - (1+2N(t))E(t)^2 \ ,
\end{aligned} \tag{20}$$

where $E(t)$ is the amplitude of the electric field, $\phi(t)$ is the corresponding phase and $N(t)$ is the carrier density. The time is normalised to the cavity photon lifetime, τ_p, (so that $t \rightarrow t/\tau_p$). T is the ratio of the carrier and photon lifetimes $T \equiv \tau_s/\tau_p$. The external round trip time is τ_e, which is also normalised to the photon lifetime ($\tau \equiv \tau_e/\tau_p$). $\tau_e = 2L/c$, where L is the distance of the semiconductor laser diode from the mirror and c is the speed of light. P is the dimensionless pumping current above threshold. η is the strength of the feedback. α is the linewidth enhancement factor and ω_0 is the frequency of the solitary laser.

Writing (20) in the form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_\tau(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))\mathbf{u}(t) + \mathbf{z}(t)$, yields

$$\begin{bmatrix} \dot{E}(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \dot{N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E(t) \\ 0 & 0 & \alpha \\ -(1+2N(t))\frac{E(t)}{T} & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(t) \\ \phi(t) \\ N(t) \end{bmatrix} + \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} \eta\cos(\phi(t-\tau) - \phi(t) - \omega_0\tau_e) & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{E(t)}\sin(\phi(t-\tau) - \phi(t) - \omega_0\tau_e) & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(t-\tau) \\ \phi(t-\tau) \\ N(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{P}{T} \end{bmatrix} \ ,$$

these are the equations that are used for the drive and response systems. The controller $u(t)$ only affects the dimensionless carrier density of the response system in order to minimise the error $e(t)$. The current P is the only parameter used for achieving synchronisation, which is modulated through the controller $(P/T+u(t))$.

The parameter values are taken from [16] and then transformed to the dimensionless values using the transformations in [15]. The following values are the same for both systems: $\tau_p=2ps$, $\tau_e=0.1ns$, $\tau\equiv\tau_e/\tau_p\equiv 50$ and $T=250$. For the drive system: $P=0.513$ (where $J=1.3J_{th}$), $\alpha=6$, $\eta_d=0.0341$ and $\omega_0=2.2161\cdot 10^{15}$rad/s ($\lambda$=850nm). For the response system: $P=0.7695$ (where $J=1.45J_{th}$), $\alpha=3.5$, $\eta_r=0.0417$ and $\omega_0=2.5115\cdot 10^{15}$rad/s ($\lambda$=750nm).

In order to accomplish the synchronisation, the chosen weighting matrices are: $\mathbf{Q}=[1,0,0;0,0,0;0,0,0]$, $\mathbf{R}=0.8$, and $\mathbf{F}=diag\{0.1,0.1,0.1\}$. The dimensionless initial conditions for the drive system are: $E_{ic}=\phi_{ic}=N_{ic}=1\cdot 10^{-4}$. And for the response system: $E_{ic}=3.529\cdot 10^{-4}$, $\phi_{ic}=0.357\cdot 10^{-4}$ and $N_{ic}=4.397\cdot 10^{-4}$. These initial conditions are used for generating the histories of $E(t)$ and $\phi(t)$, which are obtained by simulating the dynamics of the stand alone laser (without optical feedback). Then, at t_0 the initial values for the drive system are: $E_0=1.1\cdot 10^{-3}$, $\phi_0=14.42$ and $N_0=9.31\cdot 10^{-2}$. And for the response system: $E_0=1.31\cdot 10^{-2}$, $\phi_0=12.67$ and $N_0=0.14$.

The solution of the differential equations is obtained by using the Euler method with a step length of 0.05.

The synchronisation between the drive $E_d(t)$ and response $E_r(t)$ is shown in Fig.1, the error between the drive and response systems is displayed in Fig.2 and the controller used for minimising the error is depicted in Fig.3.

The number of approximations used for synchronising the systems is 90. This number is quite high due to the trade-off between the weighting matrices $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{R}$ and also because of the accuracy of the synchronisation, the complexity of the system and the time span. Note that the systems are started at different initial conditions and because of the different parameter values, they are not identical.

In the proposed synchronisation method, it is assumed that all state variables are available for feedback. In practice, however, not all state variables are available for feedback, particularly, in the semiconductor lasers field, in which the only state accessible for measurement is the electric field. Therefore, there is a need of estimating unavailable state variables, which is considered for a future improvement of the method. The estimation of unmeasurable state variables can be achieved by using state observers.

5 Conclusions

This work shows the application of an approximation sequence technique and the linear optimal regulator problem to the synchronisation of two unidirectionally coupled external cavity laser diodes. An enhancement of the method is to make the controller robust to parameter uncertainties and external disturbances. The future employment of the method is considered for encoding messages using the

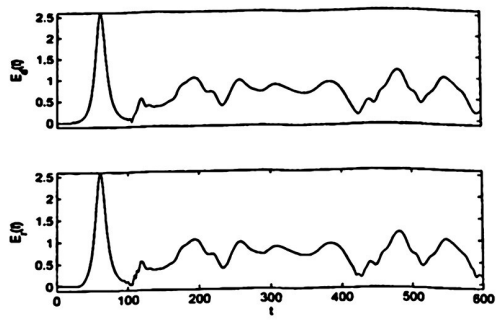


Fig. 1. Synchronisation of the dimensionless electric field amplitude.

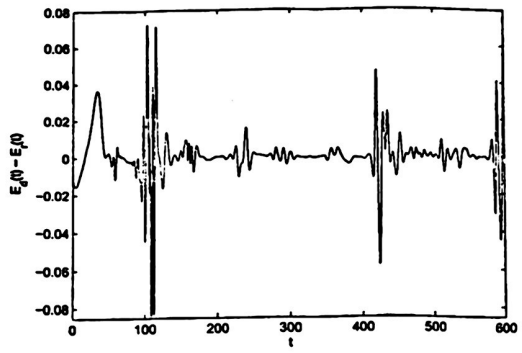


Fig. 2. Error between the drive system and response system.

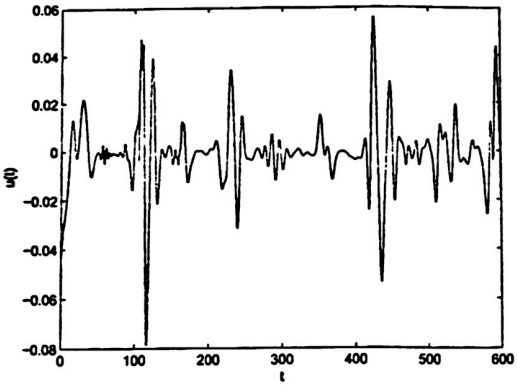


Fig. 3. Controller used for synchronising the drive and response systems.

chaotic output of the master laser, then to transmit the encoded message to the slave laser. The message is masked in the chaotic oscillations and can be decoded after synchronising the master and slave dynamics.

References

[1] Pecora, L.M., Carroll, T.L.: Synchronization in chaotic systems. Phys. Rev. Lett. 64, (8), 821–824 (1990)

[2] Kane, D.M., Shore, K.A. (Eds.): Unlocking Dynamical Diversity: Optical Feedback Effects on Semiconductor Lasers. John Wiley & Sons Ltd. England (2005)

[3] Lang, R., Kobayashi, K.: External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. IEEE J. Quantum Electron. 16, (3), 347–355 (1980)

[4] Mirasso, C.R., Colet, P., Garcia-Fernandez, P.: Synchronization of chaotic semiconductor lasers: application to encoded communications. IEEE Photonics Technol. Lett. 8, (2), 299–301 (1996)

[5] Sivaprakasam, S., Shore, K. A.: Demonstration of optical synchronization of chaotic external-cavity laser diodes. Opt. Lett. 24, (7), 466–468 (1999)

[6] Locquet, A., Masoller, C., Mirasso, C.R.: Synchronization regimes of optical-feedback-induced chaos in unidirectionally coupled semiconductor lasers. Phys. Rev. E. 65, (5), 056205 (2002)

[7] Koryukin, I.V., Mandel, P.: Two regimes of synchronization in unidirectionally coupled semiconductor lasers. Phys. Rev. E. 65, (2), 026201 (2002)

[8] Abarbanel, H.D.I., Kennel, M.B., Illing, L., Tang, S., Chen, H.F., Liu, J.M.: Synchronization and communication using semiconductor lasers with optoelectronic feedback. IEEE J. Quantum Electron. 37, (10), 1301–1311 (2001)

[9] Cruz-Hernández, C., Romero-Haros, N.: Communicating via synchronized time-delay Chua's circuits. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.13,(3),645-659(2008)

[10] Lu, J., Cao, J., Ho, D.W.C.: Adaptive stabilization and synchronization for chaotic Lur'e systems with time-varying delay. IEEE Trans. Circ. & Syst. I: Regular Papers. 55 (5), 1347–1356 (2008)

[11] Cherrier, E., Boutayeb, Ragot, J.: Observers-Based Synchronization and Input Recovery for a Class of Nonlinear Chaotic Models. IEEE Trans. Circ. & Syst. I: Regular Papers. 53 (9), 1977–1988 (2006)

[12] Banks, S.P., McCaffrey, D.: Lie algebras, structure of nonlinear systems and chaotic motion. Int. J. Bif. Chaos. 8, (7), 1437–1462 (1998)

[13] Banks, S.P.: Nonlinear delay systems, Lie algebras and Lyapunov transformations. IMA J. Math. Control Inform. 19, (1–2), 59–72 (2002)

[14] Tomás-Rodríguez, M., Banks, S.P.: Linear approximations to nonlinear dynamical systems with applications to stability and spectral theory. IMA J. Math. Control Inform. 20, (1), 89–103 (2003)

[15] Alsing, P.M., Kovanis, V., Gavrielides, A., Erneux, T.: Lang and Kobayashi phase equation. Phys. Rev. A. 53, (6), 4429–4434 (1996)

[16] Mørk, J., Tromborg, B., Christiansen, P.L.: Bistability and low-frequency fluctuations in semiconductor lasers with optical feedback: A theoretical analysis. IEEE J. Quantum Electron. 24, (2) 123–133 (1988)

Author Index
Índice de autores

Adam Medina, M. 241, 371
Aguilar, Luis T. 641
Aguilar López, R. 413
Aguilar Martínez, Jeannette 169
Aguilera González, Adriana 733
Alcocer Rosado, Wilberth M. 495
Alexandrov, V. V. 317, 681
Álvarez, Ricardo 13
Álvarez Gallegos, J. 515
Álvarez Icaza, Luis 169, 179, 189, 221, 253
Álvarez Salas, Ricardo 381
Astorga Zaragoza, C. M. 371, 733
Ávila, Julio César 231
Ayala, Lizbeth 505
Banks, S. P. 349
Barajas Ramírez, J. G. 339
Becker Bessudo, D. 329
Beltrán Carbajal,.F. 537, 547, 557
Bhattacharyya, Shankar 137
Blanco Ortega, A. 537, 547, 557
Buitrón, Germán 107
Bustillo Argáez, Carlos C. 589
Cabrera, Agustín 599
Camarillo, Alfredo 199, 307
Camarillo, Karla 285
Campa, Ricardo 285
Campos Delgado, D. U. 53
Carbajal Gutiérrez, E. E. 473
Cárdenas, Víctor 43, 463
Castrejón Lozano, Juan Gerardo 651
Carrera, Rolando 137
Chávez Conde, E. 557
Claudio Sánchez, A. 483,743
Córdova Alarcón, J. R. 661
Cornejo Romero, Cecilia 179
Cruz Jiménez, Braulio 505, 619
Cruz Villar, C. A. 275, 515
Díaz Montaño, Dulce 441
Díaz Romero, D. A. 349
Díaz Saldierna, Luis Humberto 211
Domínguez Ramírez, Omar A. 577
Doria Cerezo, A. 391
Dzul, Alejandro 199, 307, 651
Echegoyen, Tonatiuh 463
Escalante, M. F. 361
Espinosa Pérez, Gerardo 381, 391
Espinoza, Víctor E. 43
Espinoza Trejo, D. R. 53
Estrada Chávez, Ciro 441
Estrada Sánchez, I. 525
Farfán Martínez, Rosalío 65
Favela, Antonio 567
Femat, R. 339, 403, 413, 423, 431, 441
Fernández Anaya, G. 329, 403
Flores Godoy, J. J. 329
Fridman, L. 361
Gallegos, Marco Antonio 381
García Beltrán, Carlos D. 33, 75
García Delgado, Luis Arturo 651
García Hernández, Ramón 65
García Ibarra, Juan Manuel 211
Garduño Ramírez, Raúl 629
Gómez Mancilla, J. C. 159
González, Jaime 107
González López, Samuel 693
González Olvera, Marcos A. 95
González Rodríguez, Aarón 453
Guerrero Castellanos, J. F. 317, 671, 681
Guerrero Ramírez, G. V. 241, 371, 495, 743
Guerrero Sánchez, W. F. 317, 671, 681
Herrera López, Enrique 441
Hugues Salas, O. 349
Huitrón Márquez, Gabriel 441
Huitron Nieto, Gabriela 441
Javalera Rincón, Valeria 693
Jiménez de la Cruz, G. 127
Juárez, Pedro A. 567
Juárez Romero, David 733
León Morales, J. de 361
Leyva Ramos, Jesús 211, 473

Loera Palomo, R. 473
Lopezlena, Ricardo 147, 713
Luna Rivera, J. M. 723
Magallanes Lugo, Ariadna J. 693
Martínez Guerra, R. 413
Martínez Peña, Enrique 495
Martínez Prieto, José E. 33,53
Martínez Regil, S. 53
Martínez Rosas, Juan C. 253
Mata Jiménez, M. T. 361
Maya Ortiz, P. 391
Mayo Maldonado, Jonathan 453
Meda Campaña, J. A. 159
Mejía, Juan A. 13
Méndez Azúa, H. 537, 547, 557
Morales Menéndez, Rubén 3
Morales Morales, Cornelio 263
Morales Saldaña, J. A. 473
Moreno, Jaime A. 85, 107, 117, 297, 381, 391
Moreno Valenzuela, Javier 285
Murueta Fortiz, R. 317
Nosov, V. R. 159
Oliver Salazar, Marco A. 263
Ollervides, Javier 199, 307
Orduña Cabrera, Fernando 693
Orlov, Yury 641
Ortiz López, Ma. Guadalupe 211
Osorio, Marisol 297
Palacios, E. 609, 723
Pantoja Vázquez, Alfonso 189
Parra Vega, Vicente 577
Pellegrin Zazueta, Luis M. 693
Peña, Alonso 599
Portillo, Rogelio 275
Quiroz, Griselda 423, 431
Rea, Celina 3
Rendón Fraga, Erika 453
Reyes, Josué 463
Reyes Reyes, J. 371
Reyes Romero, Maribel 681
Reyna López, C. Antonio 483
Reynoso, Gilberto 567
Ricalde, Luis J. 505, 619
Robles, Raúl 599
Rodríguez, Alejandro 75, 275
Rodríguez, José de Jesús 231
Rodríguez Cortés, H. 525, 661
Rodríguez Liñan, M. C. 609
Rodríguez Martínez, Arnulfo 629,743
Rosales, Gabriel 567
Ruiz, Jorge Lenin 107
Ruiz Hernández, José A. 65
Ruiz Velásquez, Eduardo 403, 423
Rullán Lara, José L. 65
Ruz Hernández, José A. 127, 589
Salas Cabrera, Nacú 453
Salas Cabrera, Rubén 453
Salazar Mendoza, Rubén 127
Salmerón Quiróz, B. B. 671
Sánchez, Aldo 241
Sánchez Camperos, Edgar N. 589, 619
Sánchez Parra, Marino 23
Sánchez Santana, J. P. 671
Santibáñez, Víctor 199, 285, 307
Schaufelberger, Walter 703
Sepúlveda Cervantes, Gabriel 577
Shelomov, Evgen 127, 589
Shore, K. A. 349
Silva, Flor 75
Silva Navarro, G. 537, 547
Solís Perales, G. 403, 413
Starkov, Konstantin K. 641
Suárez Cerda, Dionisio A. 23, 33, 65
Suárez Durán, María U. 589
Tang, Yu 95
Tellez Anguiano, Adriana 733
Theilliol. D. 743
Torres Hernández, William 65
Valles Barajas, Fernando 703
Vela Valdés, Luis Gerardo 483, 495, 743
Velasco Villa, M. 525
Verde, Cristina 3, 23, 137
Vicente Vivas, E. 661
Villanueva Maldonado, Juvenal 221
Villareal Cervantes, M. G. 515
Visairo, Nancy 13, 43

Editorial Board of the Volume
Comité editorial de volumen

Efraín Alcorta
Jaime Álvarez Gallegos
Joaquín Álvarez Gallegos
Rafael Castro Linares
Joaquín Collado
Carlos A. Cruz Villar
Gerado Espinosa
Ricardo Femat
Carlos García Rodríguez
Raúl Garduño Ramírez
Eduardo Hernández
Víctor Manuel Hernández Guzmán
Jesús Leyva
Ernesto López Mellado
Ricardo Lópezlena
Richard Márquez
Rafael Martínez Guerra
Daniel Melchor
América Morales
Marco A. Moreno Armendáriz
Yuri Orlov
Elvia Palacios
Alexander Poznyak
Griselda Quiroz Compeán
Alejandro Rodríguez Ángeles
Hugo Rodríguez Cortés
Rubén Salas Cabrera
Edgar Sánchez
Víctor Adrián Santibáñez Dávila
Hebertt Sira Ramírez
Martín Velasco Villa
Cristina Verde Rodarte
Miguel Gabriel Villarreal Cervantes

Impreso en los Talleres Gráficos
de la Dirección de Publicaciones
del Instituto Politécnico Nacional
Tresguerras 27, Centro Histórico, México, D.F.
Octubre de 2008.
Printing 500 / *Edición 500 ejemplares.*

Este volumen contiene 72 artículos cuidadosamente seleccionados de diversos autores adscritos a diferentes universidades en México y que gozan de gran prestigio en el área de estudio. Estos trabajos presentan los desarrollos más recientes en un amplio rango de áreas relacionadas con el Control Automático. Para su mejor lectura se encuentran ordenados en 16 campos temáticos que son:

- Factibilidad de los Sistemas de Diagnóstico de Fallas
- Estimación e Identificación
- Control de Procesos
- Control de Sistemas Mecánicos
- Sistemas de Potencia I y II
- Control de Robots I y II
- Control Discontinuo
- Sincronización y Caos
- Control no Lineal de Máquinas Eléctricas
- Control de Sistemas Biomédicos
- Control de Sistemas Mecatrónicos
- Control Difuso y Neuronal
- Control de Sistemas Aeroespaciales
- Desarrollo de Software en la Ingeniería de Control

Este volumen será de gran utilidad para investigadores, estudiantes y público en general interesados en el estado del arte de las investigaciones que en el área de control automático se desarrollan actualmente en nuestro país.

ISSN: 1870-4069
www.cic.ipn.mx/rcs
www.ipn.mx

AMCA

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
"La Técnica al Servicio de la Patria"

SEP